Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 11 — J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 24.01.2005, 8:15 Uhr

Aufgabe 41: Konstruiere eine Parametrisierung der Oberfläche

$$\partial T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

des Torus T.[1]

Aufgabe 42: Für die 2-dimensionale Einheitssphäre ohne den Nordpol $S^2 \backslash \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ ist durch stereographische Projektion

$$\gamma : \mathbb{R}^2 \to S^2 \backslash \{(0, 0, 1)\}, \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

eine Parametrisierung gegeben. Berechne[2]

$$\int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left(x \cdot dy \wedge dz - y \cdot dx \wedge dz + z \cdot dx \wedge dy \right).$$

Aufgabe 43: Sei $\gamma : T \to \mathrm{Bild}(\gamma) \subset \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung der p-Fläche $X := \mathrm{Bild}(\gamma)$. Definiere den *Tangentialraum von X an der Stelle* $\gamma(t)$ als den p-dimensionalen affinen Unterraum

$$T_{\gamma(t)}(X) := \gamma(t) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t_1} \gamma(t), \ldots, \frac{\partial}{\partial t_p} \gamma(t) \right\rangle$$

und beweise für äquivalente Parameterdarstellungen $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, dass $T_{\gamma(t)}(X) = T_{\tilde{\gamma}(s)}(X)$, wobei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ für einen Diffeomorphismus ϕ mit positiver Funktionaldeterminante gilt sowie $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$.

Aufgabe 44: Schreibe einen Essay (etwa eine Seite DIN A4) über die wichtigen Aussagen und Zusammenhänge der Maßtheorie, welche in dieser Vorlesung behandelt wurden.

---

[1] **Hinweis:** Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (s, \varphi, \psi) \mapsto ((R + rs \cos\psi) \cos\varphi, (R + rs \cos\psi) \sin\varphi, rs \sin\psi)$$

könnte hilfreich sein ($0 < r < R$).

[2] **Hinweis:** Für $a > 0$ gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2a(a + t^2)} + \frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)}{2a^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{1}{(a + t^2)^2}.$$