Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 2 J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 Abgabe: Dienstag, 02.11.2004, 9:15 Uhr

Aufgabe 5: Zeige anhand eines Beispiels, dass es beschränkte Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\mu_*(M_1) = 0$, aber

$$\mu_*(M_1 \cup M_2) \neq \mu_*(M_2).$$

Aufgabe 6: Beweise, dass

1. für alle (nicht notwendig beschränkten) offenen Mengen U, deren äußeres Lebesgue-Maß $\mu^*(U)$ existiert; bzw
2. für alle (nicht notwendig beschränkten) abgeschlossenen Mengen A, deren inneres Lebesgue-Maß $\mu_*(A)$ existiert

jeweils inneres und äußeres Lebesgue-Maß existieren und übereinstimmen.

Aufgabe 7: Beweise mit dem Auswahlaxiom bzw. dem Lemma von Zorn, dass jeder (möglicherweise unendlichdimensionale) Vektorraum eine Basis besitzt.

Aufgabe 8: Für zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ist ihre *symmetrische Differenz* $A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ definiert. Weiterhin existiere das äußere Maß von A und B. Begründe, warum auch $\mu^*(A\Delta B)$ existiert und beweise:

$$\mu^*(A\Delta B) = 0 \text{ impliziert } \mu^*(A) = \mu^*(B).$$

Sei weiterhin (A_i) eine Folge von Mengen, deren äußeres Lebesgue-Maß existiert, und es konvergiere $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Zeige:

$$\lim_{i\to\infty} \mu^*(A_n\Delta A) = 0 \text{ impliziert } \lim_{i\to\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A).$$