Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III

Blatt 6 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 29.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 21: Berechne das Lebesgue-Maß der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z < e^{-(x^2+y^2)}\}.$$

Aufgabe 22: Berechne das Lebesgue-Maß der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}(1 - z), 0 \leq z \leq 1\}.$$

Zeichne eine Skizze von M.

Aufgabe 23: Sei T der Rotationskörper, welcher durch Rotation der Menge

$$\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + z^2 \leq 1\}$$

um die z-Achse entsteht. Berechne das Lebesgue-Maß von T. (Ein solcher Rotationskörper heißt *Torus*.) Zeichne eine Skizze von T.

Aufgabe 24: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\rho \in \mathcal{L}^1(M)$. Sei weiter $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 < \operatorname{dist}(U, M) := \inf \{\|x - y\| \mid x \in M, y \in U\}$. Zeige, dass

$$F : U \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_M \frac{\rho(x)}{\|x - y\|^{n-2}} d\mu(x)$$

eine zweimal partiell differenzierbare[1] Funktion ist, welche die sogenannte *Laplace'sche Differentialgleichung*

$$\Delta F := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

erfüllt. (Δ heißt *Laplace'scher-Differentialoperator*.)

[1] Tatsächlich ist F sogar *glatt*, d.h. unendlich oft (total) differenzierbar.