Lösungsvorschläge zu den Aufgaben zur Vorlesung

Analysis III (Teil 1: Maßtheorie)

Blatt 1 — J. Lohkamp/M. Förster

WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 25.10.2004,8:15 Uhr

Aufgabe 1: *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Konstruiere eine Folge $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ von offenen Intervallen mit $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| < \varepsilon$. Zeige, dass dann $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \neq \mathbb{R}$ gilt.*

LÖSUNG: Sei $\varepsilon > 0$ und $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Sei $a_i := q_i + \varepsilon \cdot 2^{i+2}$ und $b_i := q_i + \varepsilon \cdot 2^{i+2}$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-i} = \varepsilon$ und offensichtlich $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Für das Lebesgue-Maß gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| \leq \varepsilon < \infty = \mu(\mathbb{R})$. Also muss $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \neq \mathbb{R}$ gelten. ■

Aufgabe 2: *Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen heißt* summierbar *mit Summe a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede endliche Teilmenge $E \subset I$ mit $E \supset E_0$ gilt $|a - \sum_{i\in E} a_i| < \varepsilon$.*

1. *Beweise: $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge $K \subset I$ gilt $|\sum_{i\in K} a_i| < \varepsilon$.*
2. *Zeige, dass $(a_i)_{i\in I}$ genau dann summierbar ist, wenn $(|a_i|)_{i\in I}$ summierbar ist.*
3. *Beweise: Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ nicht-negativer reeller Zahlen ist genau dann summierbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\sum_{i\in E} a_i \leq c$ für jede endliche Teilmenge $E \subset I$.*
4. *Zeige, dass jede Teilfamilie $(a_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ einer summierbaren Familie $(a_i)_{i\in I}$ wieder summierbar ist.*
   Beweise weiterhin: Ist $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und für $J \subset I$ eine endliche Zerlegung $J = J_1 \cup \ldots \cup J_s$ in paarweise disjunkte Teilmengen $J_1, \ldots, J_s \subset J$ gegeben, so gilt
   $$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in J_1} a_i + \ldots + \sum_{i\in J_s} a_i.$$

LÖSUNG: In der Übung wurde gezeigt:

Seien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ summierbar sowie $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass auch $(a_i + b_i)_{i\in I}$ summierbar und $(ca_i)_{i\in I}$ summierbar sind.

DENN: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es endliche Teilmengen $E_0, F_0 \subset I$ mit $|a - \sum_{i\in E} a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - \sum_{i\in E} b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle endlichen $E \supset E_0$ bzw. $E \supset F_0$ und es folgt $|(a+b) - \sum_{i\in E}(a_i + b_i)| \leq |a - \sum_{i\in E} a_i| + |b - \sum_{i\in E} b_i| \varepsilon$ für jedes endliche $E \supset E_0 \cup F_0$.
Für $c = 0$ ist die zweite Behauptung richtig. Andernfalls gibt es zu $\frac{\varepsilon}{c}$ eine endliches $E_0 \subset I$ derart, dass für jedes endliche $E \supset E_0$ gilt $|a - \sum_{i\in E} a_i| < \frac{\varepsilon}{c}$. Dies impliziert $|ca - \sum_{i\in E} ca_i| < \varepsilon$ für jedes endliche $E \supset E_0$.

1. „⇒" Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert endliches $E_0 \subset I$ mit $|a - \sum_{i\in E} a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes endliche $E \supset E_0$. Ist $K \subset I$ endlich mit $K \cap E_0 = \emptyset$, so folgt
   $$|\sum_{i\in K} a_i| = |\sum_{i\in K\cup E_0} a_i - \sum_{i\in E_0} a_i| \leq |\sum_{i\in K\cup E_0} a_i - a| + |\sum_{i\in E0} a_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$" Es gibt eine Folge $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ von endlichen Mengen E_n, so dass für alle endlichen Mengen K mit $E_n \cap K = \emptyset$ gilt $|\sum_{i\in K} a_i| < \frac{1}{n}$, denn:
<u>IA:</u> Für $n = 1$ folgt dies aus direkt aus der Voraussetzung für $\varepsilon = 1$.
<u>IS:</u> Sind solche Menge $E_1, \dots, E_{n-1}$ konstruiert, so liefert die Voraussetzung für $\varepsilon = \frac{1}{n}$ eine Menge E'_n mit $|\sum_{i\in K} a_i| < \frac{1}{n}$ für alle endlichen K mit $K \cap E'_n = \emptyset$. Setze $E_n := E_{n-1} \cup E'_n$. Wegen $E'_n \subset E_n$ gilt dann auch $|\sum_{i\in K} a_i| < \frac{1}{n}$ für alle endlichen K mit $K \cap E_n = \emptyset$.
Die Folge der $f_n = \sum_{i\in E_n} a_i$ ist dann (nach Konstruktion) eine Cauchy-Folge, denn für $m > n$ ist $E_m - E_n$ disjunkt zu E_n. Ihr Grenzwert ist die Summe von $(a_i)_{i\in I}$. Sei nämlich $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für jedes endliche $E \subset E_n$, dass

$$|a - \sum_{i\in E} a_i| \leq |a - \sum_{i\in E_n}| + |\sum_{i\in F-E_n} a_i| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

2. „$\Rightarrow$" Ist $(|a_i|)_{i\in I}$ summierbar, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein E_0 mit $\sum_{i\in K} |a_i| < \varepsilon$ für jedes endliche K mit $K \cap E_0 =$, also auch $|\sum_{i\in K} a_i| \leq \sum_{i\in K} |a_i| < \varepsilon$.
„$\Leftarrow$" Ist umgekehrt $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und $\varepsilon > 0$, so gibt es endliches $E_0 \subset I$ mit $|\sum_{i\in K} a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes endliche K mit $K \cap E_0 = \emptyset$. Für jedes solche K sind auch $K^+ = \{i \in K \mid a_i \geq 0\}$ und $K^- = \{i \in K \mid a_i < 0\}$ disjunkt zu E_0 und erfüllen daher $|\sum_{i\in K^+} a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ bzw. $|\sum_{i\in K^-} a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dies impliziert $\sum_{i\in K} |a_i| = \sum_{i\in K^+} a_i + \sum_{i\in K^-} |a_i| < \varepsilon$.

3. „$\Rightarrow$": Sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbar mit Summe a. Dann gilt $\sum_{i\in E} a_i \leq a$ für jedes endliche $E \subset I$ denn: Angenommen, es gibt eine endliche Teilsumme $s = \sum_{i\in F} a_i$ mit $s > a$. Setze $\varepsilon := s - a > 0$, dann gibt es endliches $E_0 \subset E$, so dass für jedes endliche $E \supset E_0$ gilt $a - \varepsilon < \sum_{i\in E} a_i < a + \varepsilon$. Insbesondere erhält man für $E = E_0 \cap F_0$ eine Widerspruch zu $\sum_{i\in F} a_i = s$.
„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. Es ist $\{\sum_{i\in E} a_i \mid E \subset I \text{ endlich}\}$ beschränkt, also existiert ihr Supremum a. Folglich gibt es endliches $E_0 \subset I$ mit $a - \varepsilon < \sum_{i\in E_0} a_i \leq a$ und für jedes endliche $E \supset E_0$ folgt $a - \varepsilon < \sum_{i\in E_0} a_i \leq \sum_{i\in E} a_i \leq a$, d.h. $(a_i)_{i\in I}$ ist summierbar mit Summe a.

4. $(a_i)_{i\in I}$ summierbar, so auch $(|a_i|)_{i\in I}$. Also existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i\in E} |a_i| \leq c$ für jede endliche Teilmenge $E \subset I$. als insbesondere auch $\sum_{i\in F} |a_i| \leq c$ für jede endliche Teilmenge $F \subset J$. Also ist $(|a_i|)_{i\in J}$ summierbar und damit auch $(a_i)_{i\in J}$.
Alle vorkommenden Teilfamilie $(a_i)_{i\in J_r}$ mit $1 \leq r \leq s$ sind summierbar und es gilt $\sum_{i\in J_r} a_i = \sum_{i\in I} \alpha_{r,i}$, wobei $\alpha_{r,i} = a_i$, falls $i \in J_r$ und $\alpha_{r,i} = 0$ sonst. Dann folgt die Gleichung mit der Aussage aus der Übungsstunde.

Aufgabe 3: *Sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbar. Sei $I = \coprod_{j\in\mathbb{N}} I_j$ eine Zerlegung von I in abzählbar viele disjunkte Teilmengen $I_j \subset I$. Sei weiter $s_j := \sum_{i\in I_j} a_i$. (Beachte: $(a_i)_{i\in I_j}$ ist summierbar.) Zeige, dass auch $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ summierbar ist und die Gleichung*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j$$

erfüllt. Es darf Aufgabe 2 benutzt werden.
Folgere, dass das Lebesgue-Maßes einer Menge X wohldefiniert ist, d.h. dass $\mu(X)$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung in Quadermengen ist, wenn eine solche (wie in der Definition verlangt) existiert.

LÖSUNG: Betrachte zunächst den Fall $(a_i)_{i\in I} \geq 0$. Für jede endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j\in J} s_j \overset{\text{A2.4}}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i \overset{\bigcup_{j\in J} I_j\subset I}{\leq} \sum_{i\in I} a_i \overset{\text{Vor.}}{=} a \qquad \Rightarrow \qquad s := \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j \leq a.$$

Also ist $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ summierbar nach A2.3. Angenommen $s < a$. Wähle $\varepsilon := a - s > 0$. Dann gibt es nach Definition endliches $E \subset I$ mit $a - \varepsilon < \sum_{i\in E} a_i \leq a$. Die Mengen I_j sind für $j \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung paarweise disjunkt, d.h. die Menge $J := \{j \in \mathbb{N} \mid I_j \cap E \neq \emptyset\}$ ist endlich. Nun ist $E \subset \bigcup_{j\in J} I_j$ und es folgt

$$s \geq \sum_{j\in J} s_j \geq \sum_{i\in E} a_i \overset{\text{Ann.}}{>} a - \varepsilon = s$$

und der gewünschte Widerspruch. Für eine beliebige summierbare Familie betrachte man die Teilfamilien $(a_i)_{i\in I^+}$ mit $I^+ := \{i \in I \mid a_i \geq 0\}$ und $(a_i)_{i\in I^-}$ mit $I^- := \{i \in I \mid a_i < 0\}$. Analog erhält man eine Zerlegung von I_j in I_j^+ und I_j^-. Es gilt

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I^+} a_i + \sum_{i\in I^-} a_i \overset{\text{A2.4}}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_j^+} a_i + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_j^-} a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in A_j^+} a_i + \sum_{i\in A_j^-} a_i\right) \overset{\text{A2.4}}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in A_j} a_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j.$$

<u>Folgerung:</u>
Seien Q_i und Q'_k Quadermengen mit $\operatorname{vol}(Q_i \cap Q_j) = 0$ für $i \neq j$ und $\operatorname{vol}(Q'_k \cap Q'_l) = 0$ für $k \neq l$ sowie $X = \bigcup_{i=1}^\infty Q_i = \bigcup_{k=1}^\infty Q'_k$. Außerdem gelte $\sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}(Q_i) < \infty$ und $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}(Q'_k) < \infty$. Dann betrachte man das die (abzählbare) Quadermenge $(Q_j \cap Q'_k)_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, dessen Vereinigung ebenfalls X ist. Mit $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und $I_j = \{j\}\times\mathbb{N}$ bzw. $I_j = \mathbb{N}\times\{j\}$ erhalten wir mit der letzten Aussage

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}(Q_i) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{i=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}(Q_i \cap Q'_k) \overset{\text{A3}}{=} \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \operatorname{vol}(Q_i \cap Q'_k) \overset{\text{A3}}{=} \sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}(Q_i \cap Q'_k) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{k=1}^\infty \operatorname{vol}(Q'_k).$$

Dies beweist die Wohldefiniertheit des Lebesgue-Maßes. ■

Aufgabe 4: *Sei*

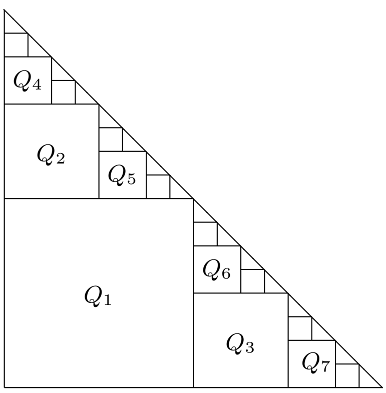
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\}$$

das offene Standarddreieck. Bestimme wie in der Definition des Lebesgue-Maßes das Lebesgue-Maß der Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$.

LÖSUNG: Definiere (halboffene und offene) Quader

$$Q_i = \left[\frac{2i - 2^j}{2^j}, \frac{2i + 1 - 2^j}{2^j}\right) \times \left[\frac{2^{j+1} - 2i - 2}{2^j}, \frac{2^{j+1} - 2i - 1}{2^j}\right) - \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\right\}$$

wobei j durch $2^{j-1} \leq i < 2^j$ festgelegt ist.



$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left(\tfrac{2\cdot1-2^1}{2^1}, \tfrac{2\cdot1+1-2^1}{2^1}\right) \times \left(\tfrac{2^{1+1}-2\cdot1-2}{2^1}, \tfrac{2^{1+1}-2\cdot1-1}{2^1}\right) = \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \times \left(0, \tfrac{1}{2}\right)\\
Q_2 &= \left(\tfrac{2\cdot2-2^2}{2^2}, \tfrac{2\cdot2+1-2^2}{2^2}\right) \times \left[\tfrac{2^{2+1}-2\cdot2-2}{2^2}, \tfrac{2^{2+1}-2\cdot2-1}{2^2}\right) = \left(0, \tfrac{1}{4}\right) \times \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right)\\
Q_3 &= \left[\tfrac{2\cdot3-2^2}{2^2}, \tfrac{2\cdot3+1-2^2}{2^2}\right) \times \left(\tfrac{2^{2+1}-2\cdot3-2}{2^2}, \tfrac{2^{2+1}-2\cdot3-1}{2^2}\right) = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right) \times \left(0, \tfrac{1}{4}\right)\\
Q_4 &= \left(\tfrac{2\cdot4-2^3}{2^3}, \tfrac{2\cdot4+1-2^3}{2^3}\right) \times \left[\tfrac{2^{3+1}-2\cdot4-2}{2^3}, \tfrac{2^{3+1}-2\cdot4-1}{2^3}\right) = \left(0, \tfrac{1}{8}\right) \times \left[\tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}\right)\\
Q_5 &= \left[\tfrac{2\cdot5-2^3}{2^3}, \tfrac{2\cdot5+1-2^3}{2^3}\right) \times \left[\tfrac{2^{3+1}-2\cdot5-2}{2^3}, \tfrac{2^{3+1}-2\cdot5-1}{2^3}\right) = \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}\right) \times \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}\right)\\
Q_6 &= \left[\tfrac{2\cdot6-2^3}{2^3}, \tfrac{2\cdot6+1-2^3}{2^3}\right) \times \left[\tfrac{2^{3+1}-2\cdot6-2}{2^3}, \tfrac{2^{3+1}-2\cdot6-1}{2^3}\right) = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}\right) \times \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}\right)\\
Q_7 &= \left[\tfrac{2\cdot7-2^3}{2^3}, \tfrac{2\cdot7+1-2^3}{2^3}\right) \times \left(\tfrac{2^{3+1}-2\cdot7-2}{2^3}, \tfrac{2^{3+1}-2\cdot7-1}{2^3}\right) = \left[\tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}\right) \times \left(0, \tfrac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

Dann gilt für $i \neq i'$, dass $Q_i \cap Q_{i'} = \emptyset$, also insbesondere $\mathrm{vol}(Q_i \cap Q_{i'}) = 0$, denn:
Fall 1: Sei $2^{j-1} \leq i, i' < 2^j$ und ohne Einschränkung $i < i'$. Dann liegt der untere Rand von Q_i oberhalb des oberen Randes von $Q_{i'}$. Da beide Quader achsenparallel sind, folgt $Q_i \cap Q_{i'} = \emptyset$.
Fall 2: Sei $2^{j-1} \leq i < 2^j$ und $2^{j'-1} \leq i' < 2^{j'}$ sowie ohne Einschränkung $j < j'$. Falls $(2i+1-2^j)/2^j \leq (2i'-2^{j'})/2^{j'}$ gilt, d.h. der rechte Rand von Q_i liegt links vom linken Rand von $Q_{j'}$ oder darauf, folgt die Behauptung wieder aus der Achsenparallelität der Quader. Andernfalls betrachte man die zweite Koordinate. Wegen

$$\frac{2i+1}{2^j} - 1 = \frac{2i+1-2^j}{2^j} > \frac{2i'-2^{j'}}{2^{j'}} = \frac{2i'}{2^{j'}} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2i+1}{2^j} > \frac{2i'}{2^{j'}} \quad \overset{j' > j}{\Rightarrow} \quad \frac{2i+1}{2^j} \geq \frac{2i'+2}{2^{j'}}$$

folgt

$$\frac{2^{j'+1}-2i'-2}{2^{j'}} = 2 - \frac{2i'+2}{2^{j'}} \geq 2 - \frac{2i+1}{2^j} \geq \frac{2^{j+1}-2i-1}{2^j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2i+1}{2^j} \geq \frac{2i'+2}{2^{j'}},$$

dass der untere Rand von $Q_{j'}$ oberhalb des oberen Randes von Q_i oder darauf liegt. Die Behauptung ergibt sich wieder aus der Achsenparallelität der Quader.
Außerdem gilt $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, denn:
„$\supset$": Sei $(x,y) \in Q_i$ für ein fest gewähltes i mit $2^{j-1} \leq i < 2^j$. Dann gilt

$$0 \leq \frac{2i-2^j}{2^j} \leq x < \frac{2i+1-2^j}{2^j} = \frac{2i+1}{2^j} - 1 < 2 - 1 = 1$$

und daraus weiter

$$0 \leq \frac{2^{j+1}-2i-2}{2^j} \leq y < \frac{2^{j+1}-2i-1}{2^j} = 2 - \frac{2i+1}{2^j} < 1 - x,$$

was die erste Inklusion impliziert, da wir das Koordinatenkreuz aus den Quadern entfernt haben.
„$\subset$": Habe leider keine vernünftige Lösung...

Die Folge der Quadermengen Q_i erfüllt also die Voraussetzungen der Definition des Lebesgue-Maßes von X und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^{j-1} \leq i < 2^j} \mathrm{vol}(Q_i) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} \cdot \mathrm{vol}(Q_{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} \cdot \left(\frac{1}{2^j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}},$$

d.h. $\mu(X) = \frac{1}{2}$. ■

Blatt 2 — J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 — Abgabe: Montag, 01.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 5: *Zeige anhand eines Beispiels, dass es beschränkte Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\mu_*(M_1) = 0$, aber*

$$\mu_*(M_1 \cup M_2) \neq \mu_*(M_2).$$

Lösung: Konstruktion der Menge M_1: Betrachte

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{[x]_{\mathbb{Q}} \mid x \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{wobei } x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Nach dem Auswahlaxiom können wir für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten $x \in [0,1]$ wählen, sei

$$M := \{\text{Repräsentanten in } [0,1]\}.$$

1. Es gilt

$$M \subset [0,1] \subset \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} q + M \subset [-1,2]$$

   und $(q+M) \cap (q' \cap M) = \emptyset$ für $q \neq q'$, denn:
   Sei $q+m = x = q'+m'$ für geeignete $m_1, m_2 \in M$. Das bedeutet $m'-m = q-q' \in \mathbb{Q}$ und daher $m \sim m'$. Daraus folgt $m = m'$, denn es gibt nur einen Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse im Intervall $[0,1]$. Insbesondere ergibt sich $q = q'$.
   Die erste Inklusion ist nach Definition von M klar. Die zweite Inklusion gilt, da jedes $x \in [0,1]$ entweder ein Repräsentant einer Äquivalenzklasse ist oder sich von einem solchen um eine rationale Zahl unterscheidet, deren Betrag durch 1 beschränkt ist. Die dritte Inklusion ist ebenfalls einfach zu beweisen, da für $-1 \leq q \leq 1$ und $0 \leq x \leq$ immer $x + q \in [-1,2]$ gilt.

2. Angenommen $\mu_*(M) = c > 0$. Dann gilt wegen der Translationsinvarianz von μ_*, dass $\mu_*(q+M) = c$ für alle $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$. Es folgt

$$3 = \mu_*([-1,2]) \geq \mu_*(\bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} q + M) \geq \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu_*(q+M) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} c = \infty,$$

   d.h. es muss $\mu_*(M) = 0$ gelten.
   Nehmen wir auf der anderen Seite an, dass $\mu^*(M) = 0$ gilt, so ergibt sich analog durch

$$1 = \mu^*([0,1]) \leq \mu^*(\bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} q + M) \leq \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \mu_*(q+M) = 0$$

   ein Widerspruch, d.h. $\mu^*(M) > 0$.

Wir setzen nun $M_1 := M$ und $M_2 := [0,1] \backslash M$. Dann kann auch M_2 nicht messbar sein, denn sonst wäre $M_1 = [0,1] \backslash M_2$ messbar. Insbesondere bedeutet dies $\mu_*(M_2) < \mu^*(M_2)$, denn eine Menge ist genau dann messbar, wenn inneres und äußeres Maß übereinstimmen. Es folgt

$$\mu_*(M_2) < \mu^*(M_2)\mu^*([0,1]) = \mu([0,1]) = \mu_*([0,1]) = \mu_*(M_1 \cup M_2)$$

und damit die Behauptung. ■

Aufgabe 6: *Beweise mit dem Auswahlaxiom bzw. dem Lemma von Zorn, dass jeder (möglicherweise unendlichdimensionale) Vektorraum eine Basis besitzt.*

LÖSUNG: Wir wiederholen die Notationen für das Lemma von Zorn:

1. Sei M eine Menge. Dann heißt $R \subset M \times M$ eine *partielle Ordnung*, falls
   (a) $(x,x) \in R$ für alle $x \in M$;
   (b) $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ impliziert $x = y$;
   (c) $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ impliziert $(x,z) \in R$.

Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x \leq y$ und nennen $(M, \leq)$ eine *geordnete Menge*. Ist $N \subset M$ eine Teilmenge eine geordneten Menge, so ist auch N geordnet bzgl. $(N \times N) \cap R$.

2. Es heißt M *total geordnet*, falls für jedes Paar von Elementen $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. (Beispielsweise ist für eine gegebene Menge S die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(S)$ geordnet bzgl. der Inklusion von Teilmengen, i.A. jedoch nicht (!) total geordnet.)

3. Ein $x \in M$ heißt *maximal*, falls es kein $y \in M$ gibt mit $x < y$, d.h. $x \leq y$ und $x \neq y$.

4. Sei $T \subset M$ eine Teilmenge. Ein $b \in M$ heißt *obere Schranke* für T, falls $x \leq b$ für alle $x \in T$ gilt.

5. Es heißt M *induktiv geordnet*, wenn gilt: Jede nichtleere total geordnete Teilmenge T von M besitzt eine obere Schranke.

Das **Lemma von Zorn** (oder äquivalent das Auswahlaxiom) besagt nun: *In jeder nichtleeren induktiv geordneten Menge M gibt es ein maximales Element.*

Betrachte die Menge M aller Familien von linear unabhängigen Vektoren in einem beliebigen Vektorraum V, d.h.

$$M = \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V \text{ linear unabhängig, } I \text{ beliebige Indexfamilie}\}$$

Für $V, W \in M$ ist durch $V \leq W :\Leftrightarrow V \subset W$ eine partielle Ordnung gegeben. Sei nun $T \subset M$ eine nichtleere total geordnete Teilmenge. Dann ist durch $\bigcup_{V \in T} V$ eine obere Schranke für T definiert, d.h. M ist induktiv geoordnet. Nach dem Lemma von Zorn besitzt M ein maximales Element. Dies bedeutet, dass V eine maximal linear unabhängige Familie, d.h. eine Basis besitzt. ■

Aufgabe 7: *Beweise, dass*

1. *für alle (nicht notwendig beschränkten) offenen Mengen, für die das äußere Lebesgue-Maß existiert, bzw.*

2. *für alle (nicht notwendig beschränkten) abgeschlossen Mengen, für die das innere Lebesgue-Maß existiert,*

inneres und äußeres Lebesgue-Maß übereinstimmen.

LÖSUNG:

1. Ist U nach Voraussetzung offen und existiert das äußere Lebesgue-Maß, so folgt direkt aus der Definition $\mu^*(M) = \mu(M)$.
   Wir müssen nun $\mu_*(M) \geq \mu(M)$ zeigen. Zu M gibt es abgeschlossene Quadermengen Q_i, welche paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben und $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ erfüllen. Da das äußere Lebesgue-Maß existiert, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_i) < \infty$ und es gibt zu $\varepsilon > 0$ somit ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{N} \mu(Q_i) \geq \mu(M) - \varepsilon$. Nun sind die Quadermengen kompakt (= abgeschlossen und beschränkt), d.h. auch $K = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i \subset M$ ist kompakt und es gilt $\mu(K) \geq \mu(M) - \varepsilon$. Wir haben also zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ gefunden, deren Lebesgue-Maß sich vom Lebesgue-Maß von M um höchstens ε unterscheidet. Dies impliziert $\mu_*(M) \geq \mu(M)$ und damit die erste Behauptung, denn es gilt immer $\mu_*(M) \leq \mu^*(M)$. ■.

2. Für eine beliebige kompakte Menge K gilt nach Definition $\mu(K) = \mu_*(K)$. Wähle einen offenen Quader $Q \supset K$ und betrachte die offene Menge $V := Q \backslash K$. Nach Teil 1) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $L \subset V$ mit $\mu(L) > \mu(V) - \varepsilon$. Für die offene Menge $U := Q \backslash L$ gilt $U \supset K$ und
$$\mu(U) = \mu(Q) - \mu(L) < \mu(Q) - \mu(V) + \varepsilon = \mu(K) + \varepsilon$$
und damit $\mu^*(K) \leq \mu(K)$, d.h. $\mu^*(K) = \mu(K) = \mu_*(K)$. Für kompakte Menge ist die Behauptung also gezeigt.
Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $A_k := [-k, k]^n \cap A$ abgeschlossen als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen und somit als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge w ieder kompakt. Weiterhin gilt $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ mit
$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A.$$
Wegen der Monotonie des äußeren Maßes folgt $\mu^*(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)$. Nun stimmen für kompakte Mengen äußeres und inneres Maß überein, daher
$$\mu^*(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_*(A_k) \leq \mu_*(A)$$
wegen der (umgekehrten) Monotonieeigenschaft des inneren Maß. Daraus folgt wegen $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ die Behauptung. ■

Aufgabe 8: *Für zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ist ihre* symmetrische Differenz $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ *definiert. Weiterhin existiere das äußere Maß von A und B. Begründe, warum auch $\mu^*(A \Delta B)$ existiert und beweise:*
$$\mu^*(A \Delta B) = 0 \textit{ impliziert } \mu^*(A) = \mu^*(B).$$
Sei weiterhin (A_i) eine Folge von Mengen, deren äußeres Lebesgue-Maß existiert, und es konvergiere $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Zeige:
$$\lim_{i \to \infty} \mu^*(A_n \Delta A) = 0 \textit{ impliziert } \lim_{i \to \infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A).$$

Lösung: Es ist $A \Delta B = A \backslash B \cup B \backslash A$. Wegen der Monotonie existieren $\mu^*(A \backslash B)$ und $\mu^*(B \backslash A)$. Existieren $\mu^*(A)$ und $\mu^*(B)$, so gibt es offene $U \supset A$ und $V \supset B$ mit existierendem Maß. Dann existiert $\mu(U \cup V)$ und somit auch $\mu^*(A \cup B)$.
Sei nun $\mu^*(A \Delta B) = 0$. Dann gilt
$$\mu^*(A) \leq \underbrace{\mu^*(A \backslash B)}_{\overset{A \backslash B \subseteq A \Delta B}{=} 0} + \mu^*(A \cap B) \overset{A \cap B \subset B}{\leq} \mu^*(B)$$
und analog $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu^*(A_i \Delta A) < \varepsilon$ für alle $i > N$. Das bedeutet
$$\mu^*(A_i) \leq \underbrace{\mu^*(A_i \backslash A)}_{\leq \varepsilon} + \mu^*(A \cap A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \qquad \text{für alle } i > N$$

und analog

$$\mu^*(A) \leq \underbrace{\mu^*(A \backslash A_i)}_{\leq \varepsilon} + \mu^*(A \cap A_i) \leq \mu^*(A_i) + \varepsilon \qquad \text{für alle } i > N.$$

Das impliziert $|\mu^*(A_i) - \mu^*(A)| < \varepsilon$ für alle $i > N$ und damit die Behauptung. ■

Aufgabe 9: *Sei $X = \mathbb{Q} \cap (0,1]$ und $\mathcal{M}$ das Mengensystem, welches aus allen Mengen der Gestalt $M = \mathbb{Q} \cap (a,b]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ besteht. Sei $f : \mathcal{M} \to [0,1]$ definiert durch $f(\mathbb{Q} \cap (a,b]) = b - a$. Zeige, dass f nicht σ-additiv ist.*

LÖSUNG: Sei $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap (0,1]$ eine Abzählung derart, dass man zu $q_n = q(n)$ ein Intervall $(q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n]$ wählen kann. Dann gilt offenbar $(0,1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty (q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n]$ und somit $\mathbb{Q} \cap (0,1] \subset \mathbb{Q} \cap \bigcup_{n=1}^\infty (q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n]$. Angenommen, f ist σ-additiv. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad f(\mathbb{Q} \cap (0,1]) \quad \leq \quad f(\mathbb{Q} \cap \bigcup_{n=1}^\infty (q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n]) \\ &\leq \quad \sum_{n=1}^\infty f((q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n]) \quad = \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} \quad = \quad -1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} \quad = \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und es folgt der gewünschte Widerspuch. ■

Aufgabe 10: *Beweise, dass durch $M_1 \sim M_2 :\Leftrightarrow \mu(M_1 \Delta M_2) = 0$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathfrak{M}$ aller Lebesgue-messbaren Funktionen erklärt ist. Zeige weiterhin, dass $d([M_1],[M_2]) := \mu(M_1 \Delta M_2)$ eine (wohldefinierte) Metrik auf der Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}$ aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ definiert.*

LÖSUNG: Es werden zunächst die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation bewiesen. Offenbar gilt für jedes $M \in \mathfrak{M}$, dass $M \Delta M = \emptyset$ und daher $\mu(M \Delta M) = 0$ bzw. $M \sim M$. Sei nun $M_1 \sim M_2$. Dann folgt sofort $\mu(M_2 \Delta M_1) = 0$ wegen der Symmetrie der (mengentheoretischen) Vereinigung. Zuletzt sei $M_1 \sim M_2$ und $M_2 \sim M_3$ vorausgesetzt, d.h. $\mu(M_1 \backslash M_2 \cup M_2 \backslash M_1) = 0$ und $\mu(M_2 \backslash M_3 \cup M_3 \backslash M_2) = 0$. Nun ist

$$M_1 \backslash M_3 \cup M_3 \backslash M_1 \subset (M_1 \cup M_2 \cup M_3) \backslash (M_1 \cap M_2 \cap M_3) = (M_1 \Delta M_2) \cup (M_2 \Delta M_3)$$

und daher wegen der Monotonie des Lebesgue-Maßes $\mu(M_1 \Delta M_3) \leq 0$. Wir haben also Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gezeigt.
Ist $M_1 \sim M_1'$ und $M_2 \sim M_2'$, so ist $\mu(M_i \Delta M_i') = 0$ für $i = 1,2$ und wegen der Monotonie insbesondere $\mu(M_i' \backslash M_i) = \mu(M_i \backslash M_i') = 0$ $(*)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(M_1' \Delta M_2') \quad &\leq \quad \mu((M_1 \Delta M_2) \cap (M_1' \Delta M_2')) \\ &= \quad \mu((M_1 \backslash M_2) \cap (M_1' \backslash M_2')) + \mu((M_1 \backslash M_2) \cap (M_2' \backslash M_1')) \\ &\qquad + \mu((M_2 \backslash M_1) \cap (M_1' \backslash M_2')) + \mu((M_2 \backslash M_1) \cap (M_2' \backslash M_1')) \\ &\overset{(*)}{=} \quad \mu((M_1 \backslash M_2) \cap (M_1' \backslash M_2')) + \mu((M_2 \backslash M_1) \cap (M_2' \backslash M_1')) \quad \leq \quad \mu(M_1 \Delta M_2) \end{aligned}$$

und analog $\mu(M_1 \Delta M_2) \leq \mu(M_1' \Delta M_2')$, d.h. es folgt die Wohldefiniertheit der Metrik d. Es bleiben die definierenden Eigenschaften nachzuweisen.

- Positiv definit: Falls $M_1 = M_2$, folgt $M_1 \Delta M_2 = \emptyset$ und daher $d([M_1],[M_2]) = 0$. Ist umgekehrt $d([M_1],[M_2]) = 0$, so gilt $M_1 \sim M_2$, d.h. $M_1 = M_2$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$.
- $d([M_1],[M_2]) = \mu(M_1 \Delta M_2) = \mu(M_2 \Delta M_1) = d([M_2],[M_1])$.
- Die Dreiecksungleichung folgt wegen $M_1 \Delta M_3 \subset M_1 \Delta M_2 \cup M_2 \Delta M_3$ (vgl. Beweis zur Transitivität der Äquivalenzrelation) aus der Monotonie des Lebesgue-Maßes. ■

Aufgabe 11: *Es sei X eine Menge sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Teilmengen von X. Der* (mengentheoretische) Limes superior *und* (mengentheoretische) Limes inferior *sind definiert als*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq m} A_n \qquad \textit{bzw.} \qquad \liminf_{n\to\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq m} A_n.$$

Zeige

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n \\
&\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n \\
&\subset \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \qquad \subset \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n.
\end{aligned}$$

Sei weiter (M_n) eine Folge Lebesgue-messbarer Mengen mit $M_i \subset M$ für eine Lebesgue-messbare Menge M. Beweise, dass auch $\limsup_{n\to\infty} M_n$ und $\liminf_{n\to\infty} M_n$ messbar sind.

Lösung: Zeige zunächst:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n\} \\
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{x \in X \mid x \in A_n \text{ für fast alle } n\}
\end{aligned}$$

Sei $x \in \liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$. Dann existiert ein N_0, so dass $x \in A_n \cap B_n$ für alle $n > N_0$, d.h. $x \in A_n$ für alle $n > N_0$ und $x \in B_n$ für alle $n > N_0$
$\Rightarrow x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n$.
Also ist insbesondere x in unendlich vielen der A_n enthalten, d.h. $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$
$\Rightarrow x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n$.
Also ist x in unendlich vielen $A_n \cap B_n$ enthalten.
$\Rightarrow x \in \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$.
Dies bedeutet $x \in A_n$ für unendlich viele n und $x \in B_n$ für unendlich viele n,
$\Rightarrow x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$.
Die Lebesgue-Messbarkeit folgt direkt aus der Definition: Endliche Vereinigungen und Durchschnitte messbarer Mengen sind messbar, ebenso unendliche Vereinigungen und Durchschnitte, wenn ihr Maß existiert. Dies ist jedoch garantiert, da alle auftretenden Mengen in einer messbaren Menge M enthalten sind. ■

Aufgabe 12: *Betrachte den Mengenring $\mathfrak{M}$ und eine additive Funktion $f : \mathfrak{M} \to [0,\infty)$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Bedingungen*

1. *f ist σ-additiv.*

2. *Für alle Folgen $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ mit $M_i, M := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathfrak{M}$ gilt*

$$f(M) = \lim_{i\to\infty} f(M_i).$$

LÖSUNG: „$\Rightarrow$" Setze $B_1 := M_1$ und $B_i = M_i \backslash B_{i-1}$. Dann sind die B_i messbar und paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_n$ sowie $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = M$. Da f nach Voraussetzung σ-additiv ist, folgt

$$f(M) = f(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(B_i) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} f(B_i)) = \lim_{n\to\infty} f(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} f(M_n).$$

„$\Leftarrow$" Sei B_i eine beliebige Folge Lebesgue-messbarer paarweise dijunkter Mengen. Setze $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Dann ist A_i messbar für jedes i und es gilt $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ sowie $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{M}$ nach Voraussetzung an die Vereinigung der B_i. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(B_i) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} f(B_i)) = \lim_{n\to\infty} f(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} f(A_n) = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

und damit die Behauptung. ■

Blatt 4 | J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 | Abgabe: Montag, 15.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 13: *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Zeige, dass $f : M \to \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-messbar ist, wenn das Urbild $f^{-1}(J)$ für jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.*

LÖSUNG: „$\Leftarrow$" Sei $f^{-1}(J)$ für jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ messbar. Insbesondere gilt dies für jedes $f^{-1}((-\infty, b]) = \{x \in M \mid f(x) \leq b\}$, wobei $b \in \mathbb{R}$. Dies ist aber nach Vorlesung äquivalent zur Messbarkeit der Funktion f.
„$\Rightarrow$" Umgekehrt sei f eine Lebesgue-messbare Funktion. Nach Vorlesung ist dies äquivalent zur Messbarkeit der Menge $f^{-1}((-\infty, b])$ für jedes $b \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist für $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ die Menge $f^{-1}(\mathbb{R}) = M$ messbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(a,\infty) &= \mathbb{R}\backslash(-\infty, a], \\
(a,b] &= (-\infty, b] \cap (a,\infty), \\
(-\infty, b) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, b_n] \qquad \text{mit } b_n = b - \frac{1}{n}, \\
[a,\infty) &= \mathbb{R}\backslash(-\infty, a), \\
[a,b] &= (-\infty, b] \cap [a,\infty), \\
[a,b) &= [a,\infty) \cap (-\infty, b), \\
(a,b) &= (-\infty, b) \cap (a,\infty).
\end{aligned}$$

Die Urbildfunktion ist mit allen auftretenden Mengenoperationen verträglich. Also folgt die Messbarkeit von

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}((a,\infty)) = & M\backslash f^{-1}((-\infty,a]) & \text{als Differenz,} \\
f-1((a,b]) = & f^{-1}((-\infty,b])\cap f^{-1}((a,\infty)) & \text{als endlicher Durchschnitt,} \\
f^{-1}((-\infty,b)) = & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((-\infty,b_n]) & \text{als abzählbare Vereinigung,} \\
f^{-1}([a,\infty)) = & M\backslash f^{-1}((-\infty,a)) & \text{als Differenz,} \\
f^{-1}([a,b]) = & f^{-1}((-\infty,b])\cap f^{-1}([a,\infty)) & \text{als endlicher Durchschnitt,} \\
f^{-1}([a,b)) = & f^{-1}([a,\infty))\cap f^{-1}((-\infty,b)) & \text{als endlicher Durchschnitt} \\
f^{-1}((a,b)) = & f^{-1}((-\infty,b))\cap f^{-1}((a,\infty)) & \text{als endlicher Durchschnitt.}
\end{array}$$

messbarer Mengen, wobei bei der abzählbaren Vereinigung zu beachten ist, dass ihr Maß

$$\mu(M) \geq \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty,b_n] = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty,b_n] = \mu((-\infty,b])$$

existiert (Stetigkeit des Lebesgue-Maßes). Es folgt die Behauptung, andere Intervalltypen gibt es nicht. ■

Aufgabe 14: *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei weiterhin $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar mit $\{(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in M\} \subset U$. Zeige, dass auch*

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(f_1(x), f_2(x))$$

eine Lebesgue-messbare Abbildung ist.

Lösung: Da f_1 und f_2 messbar sind, gibt es Folgen $(g_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen, welche gleichmäßig und somit insbesondere punktweise gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Zu jedem beliebigen (fest gewählten) $x \in M$ ist gibt es eine Umgebung $U_x \subset U$ von $(f_1(x), f_2(x)) \in U$, weil U offen ist. Also existiert ein $N_x \in \mathbb{N}$, so dass $(g_{1,n}(x), g_{2,n}(x)) \in U_x$ für alle natürlichen Zahlen $n > N_x$ gilt. Definiere

$$g_n : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(g_{1,n+N_x}(x), g_{2,n+N_x}(x)).$$

Dann nimmt auch jedes g_n höchstens abzählbar viele Werte an, da dies nach Voraussetzung für die $g_{1,n+N_x}$ und $g_{2,n+N_x}$ gilt, g_n ist also einfach. Aufgrund der Stetigkeit von φ folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(g_{1,n+N_x}(x), g_{2,n+N_x}(x)) \\
&= \varphi(\lim_{n\to\infty}(g_{1,n+N_x}(x), g_{2,n+N_x}(x)) = \varphi(f_1(x), f_2(x)) = f(x).
\end{aligned}$$

Also ist f als punktweiser Grenzwert von messbaren Funktionen nach einem Satz aus der Vorlesung selbst wieder messbar. ■

Aufgabe 15: *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* Lebesgue-messbar mit unendlichem Maß *$\mu(M) = \infty$, falls für jedes $r > 0$ der Durchschnitt $B_r(0) \cap M$ der Kugel vom Radius r um den Koordinatenursprung mit der Menge M Lebesgue-messbar ist und die Funktion $\alpha : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, r \mapsto \mu(M \cap B_r(0))$ nicht beschränkt ist. Beweise oder widerlege:*

1. *Jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar.*

2. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f = g$* fast überall, *d.h. die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\} \subset \mathbb{R}$$

ist eine Nullmenge. Dann gilt bereits $f = g$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG: Beachte zunächst, dass mit dieser erweiterten Definition alle Intervalle $J \subset \mathbb{R}$ messbar sind. Falls mindestens eine der Intervallgrenzen $\pm\infty$ ist, hat das Intervall das Lebesgue-Maß $\mu(J) = \infty$.

1. Sei nun f monoton wachsend. Um die Lebesgue-Messbarkeit zu beweisen, können wir äquivalent zeigen, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((-\infty, c])$ messbar ist. Definiere $b := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq c\}$. Dann gilt

$$f^{-1}((-\infty, c]) = \begin{cases} (-\infty, b] & \text{falls } f(b) = c \\ (-\infty, b) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es sind beide Inklusionen zu beweisen:

„$\subset$" Sei $x_0 \in f^{-1}((-\infty, c])$, d.h. $f(x_0) \leq c$.

(a) Angenommen $f(b) = c$ und $x_0 > b$. Da f monoton wachsend ist, gilt dann $c \geq f(x_0) \geq f(b)$. Nach Konstruktion von b bedeutet dies jedoch $x_0 \leq b$ und es folgt der gewünschte Widerspruch.

(b) Angenommen $f(b) > c$ und $x_0 \geq b$. Da f monoton wächst, folgt $c \geq f(x_0) \geq f(b) > c$ und damit der gewünschte Widerspruch.

„$\supset$"

(a) Sei $f(b) = c$ und $x_0 \in (-\infty, b]$. Da f monoton wächst, gilt $f(x_0) \leq f(b) = c$.

(b) Sei $f(b) > c$ und $x_0 \in (-\infty, b)$. Angenommen $f(x_0) > c$. Da f monoton wächst, gilt für alle $x \geq x_0$, dass $c < f(x_0) \leq f(x)$. Dann ist jedoch $b = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq c\} \leq x_0 < b$ und es ergibt sich der gewünschte Widerspruch.

Somit ist das Urbild $f^{-1}((-\infty, c])$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ messbar. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist dies jedoch äquivalent zur Messbbarkeit von f, jede monotone Funktion ist also messbar. ■

2. Sei $x \in \mathbb{R}$ ein Element der angesprochenen Nullmenge, d.h. $f(x) \neq g(x)$. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Folge der offene Intervalle $I_n(x) := (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Dann muss es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in I_n(x)$ geben, mit $f(x_n) = g(x_n)$, denn sonst wäre $I_n(x) \subset \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ und Letzteres damit keine Nullmenge mehr. Nun gilt aber $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, denn $|x - x_n| < \frac{1}{n}$. Wegen der Stetigkeit von f und g folgt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. ■

Aufgabe 16: *Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere Funktionen $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch*

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. *Zeige, dass speziell für $f(x) = 1, f(x) = x$ und $f(x) = x(1-x)$ die zugehörige Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, beachte $x \in [0,1]$.*

2. *Beweise für $x \in [0,1]$ die Gleichung*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} x(1-x)$$

und folgere

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4n}.$$

3. *Zeige, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Teil 1 und 2 dürfen benutzt werden.* [1]

LÖSUNG:

1. (a) Für die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ gilt

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot 1 = (x + (1-x))^n = 1,$$

d.h. $p_n = f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt insbesondere die glm. Konvergenz. ■

(b) Für die Funktion $f = id : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ gilt

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n!}{n \cdot k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x \cdot x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&\overset{\text{Index}}{=} x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = x \cdot (x + (1-x))^{n-1} = x,
\end{aligned}$$

d.h. $p_n = f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt insbesondere die glm. Konvergenz. ■

(c) Für die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x(1-x)$ gilt

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot \frac{k(n-k)}{n^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k) \cdot n!}{n^2 \cdot k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n} x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)}{(k-1)!(n-k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} \quad = \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x(1-x).
\end{aligned}$$

Hier ist $\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ und es folgt wiederum die glm. Konvergenz. ■

---

[1] Es folgt, dass der Raum $P([a,b])$ aller Polynomfunktionen $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ dicht in dem vollständigen Raum $C([a,b])$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liegt, wenn wir die $C([a,b])$ als normierten Vektorraum mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ betrachten. Dabei heißt eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X *dicht*, falls $\overline{A} = X$ gilt. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt auch *Banachraum*.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\cdot\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\\
&= x^2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{Bin. LS}}{=}1} -2x\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{Teil 1.b)}}{=}x} +\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2-2x^2-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{Teil 1.c)}}{=}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot x(1-x)}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{Teil 1.b)}}{=}x}\\
&= x-x^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)x(1-x) \quad=\quad \frac{1}{n}x(1-x).
\end{aligned}$$

Alle Summanden sind wegen $0\le x\le 1$ nicht-negativ und daher

$$0\le\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\cdot\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n}x(1-x)\le\frac{1}{4n},$$

denn die (glatte) Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto x(1-x)$ hat Ableitung $f'(x)=1-2x$ und somit ein Minimum an der Stelle $\frac{1}{2}$, denn $f''(x)=-2<0$. Wegen $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ folgt die Behauptung. ■

3. Sei $\varepsilon>0$. Nach Voraussetzung ist $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig und daher auch schon glm. stetig, weil $[0,1]$ kompakt ist. Also gibt es $\delta>0$, so dass für $|x-y|<\delta$ folgt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Außerdem ist $|f|$ beschränkt durch eine Konstante c, weil f stetig ist. Sei nun $x\in[0,1]$ fest gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&|f(x)-p_n(x)|\\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{\substack{0\le k\le n\\ |x-\frac{k}{n}|<\delta}}\underbrace{\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\overset{\text{glm. Stet.}}{<}\varepsilon}\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{\substack{0\le k\le n\\ |x-\frac{k}{n}|\ge\delta}}\underbrace{\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le}2c}\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le \varepsilon\cdot\sum_{\substack{0\le k\le n\\ |x-\frac{k}{n}|<\delta}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{\substack{0\le k\le n\\ |x-\frac{k}{n}|\ge\delta}}2c\cdot\underbrace{\frac{(x-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}}_{\ge 1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le \varepsilon\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{Bin. LS}}{=}1}+\frac{2c}{\delta^2}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\overset{\text{Teil 2}}{\le}\frac{1}{4n}}\\
&\le \varepsilon+\frac{c}{2n\delta^2}\quad\le\quad 2\varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n>N>\frac{c}{2\varepsilon\delta^2}$. Da N unabhängig von x ist, folgt die Behauptung. ■

Aufgabe 17: *Sei $f : M \to \mathbb{R}$ messbar und $F \in \mathcal{L}^1(M)$ mit $|f(x)| \leq F(x)$ fast überall. Zeige, dass auch f Lebesgue-integrierbar ist.*

LÖSUNG: Da f messbar ist, gibt es nach Definition eine Folge von (nicht notwendig integrierbaren) einfachen Funktionen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, etwa

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^k \cdot \chi_{M_i^k}(x) \qquad \text{wobei } M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i^k \text{ mit } M_i^k \cap M_j^k = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Da F integrierbar ist, gibt es nach Definition eine Folge $(G_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren einfachen Funktionen, die gleichmäßig gegen F konvergiert, etwa

$$G_l(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^l \cdot \chi_{M_j'^k}(x) \qquad \text{wobei } M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j'^k \text{ mit } M_i'^k \cap M_j'^k = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Die Voraussetzung impliziert

$$\lim_{l\to\infty} G_l(x) = F(x) \geq |f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} g_k(x)\right| \overset{|\cdot| \text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} |g_k(x)|$$

und daher folgt mit dem großen Umordnungssatz (A3) für k mit $|g_k(x)| \leq G_k(x) + \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i^k| \cdot \chi_{M_i^k}(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} |c_i^k| \cdot \chi_{M_i^k \cap M_j'^k}(x) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} (C_j^k + \varepsilon) \cdot \chi_{M_i^k \cap M_j'^k}(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} C_j^k \chi_{M_j'^k}(x) + \varepsilon.$$

Also sind nach Definition auch tatsächlich fast alle g_k integrierbar. ■

Aufgabe 18: *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $f : M \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion. Zeige: f ist genau dann Lebegue-integrierbar , wenn*

$$M_f := \{(x, z) \in M \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z < f(x)\} \subset \mathbb{R}^n$$

Lebesgue-messbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_M f d\mu_n = \mu_{n+1}(M_f),$$

wobei μ_{n+1} das $(n + 1)$-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.[2]

LÖSUNG: Wir bemerken zunächst, dass $M_j^k = M \cap f^{-1}([\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}))$ messbar ist. Für die Funktionenfolge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt:

[2]Hinweis: Zeige, dass durch

$$g_k(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{2^k} & \text{für } x \in M_j^k := \{x \in M \mid \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Folge nicht-negativer einfacher Funktionen $g_k : M \to \mathbb{R}$ definiert wird, die monoton wächst und gleichmäßig gegen f konvergiert.
Außerdem darf benutzt werden: Für ein beschränktes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist $M \times J$ genau dann messbar, wenn M messbar ist, und in diesem Fall gilt $\mu_{n+1}(M \times J) = \mu_n(M) \cdot \mu_1(J)$.

1. $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge nicht-negativer einfacher Funktionen mit $g_k \le f$.

2. $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, denn unabhängig von j und damit unabhängig von x gilt $|g_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^k} \to 0$ für $k \to \infty$.

3. Für jedes j und $x \in M_j^k$ ist nach Konstruktion $\frac{2j-2}{2^{k+1}} \le f(x) < \frac{2j}{2^{k+1}}$ und daher $x \in M_{2j-1}^{k+1}$ oder $x \in M_{2j}^{k+1}$, was $g_{k+1}(x) \ge \frac{2j-2}{2^{k+1}} = g_k(x)$ impliziert, d.h. die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

„$\Rightarrow$" Falls $f \in \mathcal{L}^1(M)$, ist nach A17 unter Verwendung von 1 auch $g_k \in \mathcal{L}^1$ und es gilt (mit der Notation aus der Lösung von A17) für jedes feste $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_M g_k d\mu_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^k \mu_n(M_j^k) \overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{n+1}(M_j^k \times [0, c_j^k)) = \mu_{n+1}(M_{g_k}) \qquad (*).$$

Aus 3 folgt $M_{g_1} \subset M_{g_2} \subset \ldots$ und zusammen mit 2 die Gleichung $M_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{g_k}$ (insbesondere ist M_f messbar) und weiter

$$\mu_{n+1}(M_f) \overset{\mu \text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n+1}(M_{g_k}) \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_M g_k d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \int_M f d\mu.$$

„$\Leftarrow$" Sei M_f messbar. Definiere für $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$

$$M_k := \{(x,z) \in M_f \mid c \le z \le c + \frac{1}{k}\} = M_f \cap (M \times [c, c + \frac{1}{k}]).$$

Es ist M_k aufgrund der Voraussetzungen und wegen des Hinweises messbar. Dann ist aber auch

$$C_k := \{(x, k(z-c)+c) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x,z) \in M_k\}$$

messbar und es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \{x \in M \mid f(x) > c\} \times [c, c+1].$$

„$\subset$" Ist nämlich $(x,z) \in C_k$, so bedeutet dies $z = k(z'-c)+c$ für ein $z' \in M_k$, d.h. insbesondere $c \le z' \le c + \frac{1}{k}$ und daher $c = k(c-c)+c \le z \le k(c+\frac{1}{k}-c)+c = c+1$. Andererseits ist $f(x) > z \ge c$, so dass die erste Inklusion folgt.
„$\supset$" Sei umgekehrt (x,z) gegeben mit $f(x) > c$ und $c \le z \le c+1$. Wegen $f(x) > c$ können wir ein $k \in \mathbb{N}$ wählen mit $f(x) > \frac{z-c}{k} + c$. Definiere $z' := \frac{z-c}{k} + c \in [c, c+\frac{1}{k}]$. Dann gilt $(x, z') \in M_k$ und daher $(x,z) \in C_k$.
Da die abzählbare Vereinigung der C_k wieder messbar ist, folgt mit dem Hinweis insbesondere die Messbarkeit von $\{x \in M \mid f(x) > 0\}$ und damit die Messbarkeit von f wegen der Aussage in A13.
Für die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt wiederum

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^k \mu_n(M_j^k) \overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{n+1}(M_j^k \times [0, c_j^k)) = \mu_{n+1}(M_{g_k}) \le \mu_n(M_f),$$

denn wegen 3 ist $M_{g_k} \subset M_f$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet aber nach Definition, dass die g_k integrierbar sind. Wegen 2 ist dann auch f integrierbar. ■

Aufgabe 19: *Beweise: Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mu(x),$$

wobei die linke Seite der Gleichung das Riemann-Integral und die rechte Seite das Lebesgue-Integral bezeichnet.

LÖSUNG: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, d.h es gibt eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine absteigende Folge von Treppenfunktionen $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} |\psi_n(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a, b]$, da nach Voraussetzung Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen. Treppenfunktionen sind einfache Funktionen der Form $\sum_{i=1}^r c_i \cdot \chi_{[a_i,b_i)}$ und daher insbesondere Lebesgue-integrierbar. Also ist f gleichmäßiger Limes von Lebesgue-integrierbaren einfachen Funktionen und daher nach Definition Lebesgue-integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f d\mu &\overset{\text{Def. } f \in \mathcal{L}^1([a,b])}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n d\mu \\
&\overset{\text{Def. } \varphi_n \in \mathcal{L}^1([a,b])}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^r c_i \cdot \mu([a_i, b_i]) \\
&\overset{\text{Def. } \mu}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^r c_i \cdot (b_i - a_i) \\
&\overset{\text{Def. } \varphi \text{ Riemann-int.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \\
&\overset{f \text{ Riemann-int.}}{=} \begin{cases} \sup \{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \leq f \text{ Treppenfunktion}\} \\ \inf \{\int_a^b \psi(x)dx \mid \psi \geq f \text{ Treppenfunktion}\} \end{cases} \\
&= \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Aufgabe 20: *Zeige anhand eines Beispiels, dass im Satz über die majorisierte Konvergenz die Bedingung der Majorisierung nicht weggelassen werden kann.*

LÖSUNG: Definiere

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n(1 - nx) & \text{falls } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig und daher insbesondere Riemann-integrierbar. Angenommen, der Satz über die majorisierte Konvergenz gilt auch ohne die Bedingung der Majorisierung. Dann gilt

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \overset{\text{A19}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n d\mu \overset{\text{Ann.}}{=} \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \overset{\text{A19}}{=} \int_0 10dx = 0$$

und wir erhalten den gewünschten Widerspruch. ■

Blatt 6 J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 Abgabe: Montag, 29.11.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 21: *Berechne das Lebesgue-Maß der Menge*

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le e^{-(x^2+y^2)}\}.$$

LÖSUNG: Betrachte für $r \ge 0$ zunächst die Funktion $f_r : B_r(0) \to \mathbb{R}, (x, y) \to e^{-(x^2+y^2)}$. Dann ist f_r als stetige Funktion auf der kompakten Menge $B_r(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2\}$ Lebesgue-integrierbar. Für $k \in \mathbb{N}$ und $j \le k$ sei

$$M_j^k := \left\{(x, y) \in B_r(0) \mid \frac{(j-1)^2}{k^2} r^2 \le x^2 + y^2 \le \frac{j^2}{k^2} r^2\right\}$$

Dann gilt $\mu_2(M_j^k \cap M_i^k) = 0$ für $i \ne j$, wir definieren einfache Funktionen

$$g_k(x, y) := c_j^k := e^{-\frac{j^2}{k^2} r^2}, \qquad \text{falls } (x, y) \in M_j^k.$$

Es gilt $g_k \in \mathcal{L}(B_r(0))$ für alle k und (g_k) konvergiert gleichmäßig gegen f. Wegen

$$\mu_2(M_j^k) = \pi \frac{j^2}{k^2} r^2 - \pi \frac{(j-1)^2}{k^2} r^2 = \pi(2j-1)\frac{r^2}{k^2}$$

folgt

$$\int_{B_r(0)} g_k d\mu = \sum_{j=1}^{k} c_j^k \cdot \mu_2(M_j^k) = \pi \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{2j}{k} r \cdot e^{-\frac{j^2}{k^2} r^2} \cdot \frac{r}{k}}_{=:\Sigma_1} - \frac{\pi r}{k} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{j^2}{k^2} r^2} \cdot \frac{r}{k}}_{=:\Sigma_2}.$$

Die Funktionen $f_1(t) := 2te^{-t^2}$ und $f_2(t) := e^{-t^2}$ sind auf $[0, r]$ Riemann-integrierbar und daher konvergieren die Summen Σ_1 und Σ_2 für $k \to \infty$ gegen den Wert der entsprechenden Integrale. Es gilt

$$\int_0^r 2te^{-t^2} dt = \int_0^{r^2} e^{-s} ds = 1 - e^{-r^2}$$

sowie

$$\sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{j^2}{k^2} r^2} \frac{r}{k} \le \int_0^r e^{-t^2} dt \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} e^{-\frac{j^2}{k^2} r^2} \frac{r^2}{k^2} = 0.$$

Dies impliziert

$$\mu_3(M_{f_r}) = \int_{B_r(0)} f_r d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{B_r(0)} g_k d\mu = \pi \cdot (1 - e^{-r^2}).$$

Nun ist (M_{f_n}) ein aufsteigende Folge von Mengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{f_n} = M$. Die Stetigkeit des Lebesgue-Maßes impliziert

$$\mu_3(M) = \lim_{n\to\infty} \mu_3(M_{f_n}) = \lim_{n\to\infty} \pi(1 - \exp -n^2) = \pi.$$

Alternativer Beweis: Betrachte für $z > 0$ und $|y| < -\ln z$

$$F(y) := y \cdot \sqrt{-\ln(z) - y^2} - \ln(z) \cdot \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{-\ln(z) - y^2}}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F'(y) &= \sqrt{-\ln(z) - y^2} + y\frac{-2y}{2\sqrt{-\ln(z) - y^2}} \\ &\quad - \ln(z)\frac{1}{1 + \frac{y^2}{-\ln(z) - y^2}} \cdot \frac{\sqrt{-\ln(z) - y^2} - \frac{y\cdot(-2y)}{2\sqrt{-\ln(z) - y^2}}}{-\ln(z) - y^2} \\ &= \frac{-\ln(z) - y^2 - y^2}{\sqrt{-\ln(z) - y^2}} + \frac{-\ln(z) - y^2 + y^2}{\sqrt{-\ln(z) - y^2}} \quad = \quad 2\sqrt{-\ln(z) - y^2}. \end{aligned}$$

M ist in z-Richtung auf $[0,1]$ beschränkt. Für $z \in [0,1]$ sei

$$M(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{-(x^2+y^2)} > z\}.$$

Es ist $M(z)$ in y-Richtung beschränkt auf $[-\sqrt{-\ln(z)}, \sqrt{-\ln(z)}]$, denn

$$e^{-(x^2+y^2)} > z \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) > \ln(z) \Leftrightarrow x^2 < -\ln(z) - y^2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{-\ln(z) - y^2}.$$

Insbesondere also $|y^2| \leq -\ln(z)$. Setze für $y \in (-\sqrt{\ln(z)}, \sqrt{\ln(z)})$

$$M(z)(y) := \{x \in \mathbb{R} \mid e^{-x^2} > ze^{y^2}\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mu_1(M(z)(y)) &= 2\sqrt{-\ln(z) - y^2} \\ \overset{\text{Cavalieri}}{\Rightarrow} \quad \mu_2(M(z)) &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{-\ln(z)}} 2 \cdot \sqrt{-\ln(z) - y^2}\, dy \quad = \quad -2 \cdot \ln(z) \cdot \frac{\pi}{2} \\ \overset{\text{Cavalieri}}{\Rightarrow} \quad \mu_3(M) &= -\pi \cdot \int_0^1 \ln(z)\, dz \quad = \quad [-\pi\,(z\ln(z) - z)]_0^1 \quad = \quad \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 22: *Berechne das Lebesgue-Maß der Menge*

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}(1-z), 0 \leq z \leq 1\}.$$

Zeichne eine Skizze von M.

Lösung: Für festes z sei

$$M(z) := \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}(1-z)\}$$

sowie für zusätzlich festes x mit $(x,y) \in M(z)$

$$M(z)(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \sin x\} \quad \Rightarrow \quad \mu_1(M(z)(x)) = \sin x.$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt (da M in z-Richtung auf $[0,1]$ und $M(z)$ in x-Richtung auf $[0,\frac{\pi}{2}(1-z)]$ beschränkt ist) unter Verwendung von Aufgabe 17

$$\begin{aligned}
\mu_3(M) &= \int_0^1 \mu_2(M(z))dz &&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}(1-z)} \mu_1(M(z)(x))dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}(1-z)} \sin x dx\right) dz &&= \int_0^1 \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}z\right)\right) dz \\
&= 1-\int_0^1 \sin\left(-\frac{\pi}{2}z\right)dz &&= 1-\frac{2}{\pi}\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin(z)dz \\
&= 1-\frac{2}{\pi}\left(1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) &&= 1-\frac{2}{\pi}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aufgabe 23: *Sei T der Rotationskörper, welcher durch Rotation der Menge*

$$\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+z^2\le 1\}$$

um die z-Achse entsteht. Berechne das Lebesgue-Maß von T. (Ein solcher Rotationskörper heißt Torus.*) Zeichne eine Skizze von T.*

LÖSUNG: T ist in z-Richtung auf das Intervall $[-1,1]$ beschränkt. Für festes $z\in[-1,1]$ sei wieder

$$M(z) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y,z)\in T\}.$$

Dann gilt

$$M(z)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2-\sqrt{1-z^2}\le x^2+y^2\le 2+\sqrt{1-z^2}\},$$

d.h. $M(z)$ ist ein Kreisring mit

$$\mu_2(M(z))=\pi\cdot(2+\sqrt{1-z^2})^2-\pi\cdot(2-\sqrt{1-z^2})^2=8\pi\cdot\sqrt{1-z^2}.$$

Das Prinzp von Cavalieri liefert nun

$$\mu_3(T)=\int_{-1}^1 \mu_2(M(z))dz = 8\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1-z^2}dz = 8\pi\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi^2.$$

(Substituiere z durch die Sinusfunktion und integriere anschließend partiell.) $\blacksquare$

Aufgabe 23: *Sei $M\subset\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\rho\in\mathcal{L}^1(M)$. Sei weiter $U\subset\mathbb{R}^n$ offen mit $0<\operatorname{dist}(U,M):=\inf\{\|x-y\|\mid x\in M, y\in U\}$. Zeige, dass*

$$F: U\to\mathbb{R},\quad y\mapsto \int_M \frac{\rho(x)}{\|x-y\|^{n-2}}d\mu(x)$$

eine zweimal partiell differenzierbare Funktion ist, welche die sogenannte Laplace'sche Differentialgleichung

$$\Delta F := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0$$

erfüllt. (Δ heißt Laplace'scher-Differentialoperator.*)*

LÖSUNG: Die Funktion

$$f : M \times U \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{\rho(x)}{\|x-y\|^{n-2}}$$

ist wegen $U \cap M = \emptyset$ wohldefiniert und induziert für jedes feste $x \in M$ eine unendlich oft partiell differenzierbare Funktion

$$f_x : U \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{\rho(x)}{\|x-y\|^{n-2}}.$$

Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial y_i} f_x(y) = \rho(x) \cdot (n-2) \cdot \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n}.$$

Wegen $|x_i - y_i| \leq \|x-y\|$ sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung durch die Lebesgue-integrierbare Funktion $\frac{n-2}{\mathrm{dist}(U,M)^{n-1}}\rho(x)$ majorisiert. Nach einem Satz aus der Vorlesung (Barner-Flohr S. 287 ff.) ist F zunächst partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial y_i} F(y) = \int_M \frac{\partial}{\partial y_i} f(x,y) d\mu(x).$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} f_x(y) &= \rho(x) \cdot (n-2) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^n} \right) \\ &= \rho(x) \cdot (n-2) \cdot \begin{cases} \left(\frac{-1}{\|x-y\|^n} + \frac{n(x_i-y_i)^2}{\|x-y\|^{n+2}} \right) & \text{falls } i = j \\ \frac{n(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{\|x-y\|^{n+2}} & \text{falls } i \neq j \end{cases}. \end{aligned}$$

Wie zuvor ergibt sich die Majorisierung der zweiten partiellen Ableitungen durch die Lebesgue-integrierbare Funktion $\frac{n(n-2)}{\mathrm{dist}(U,M)^n}\rho(x)$. Also wird auch $\frac{\partial F}{\partial y_j}$ durch eine Lebesgue-integrierbare Funktion majorisiert und ist daher nach demselben Satz zweimal partiell differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} F(y) = \int_M \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i} f_x(y) d\mu(x).$$

Weiterhin gilt $\Delta F = 0$, denn

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} f_x(y) = \rho(x) \cdot (n-2) \cdot \underbrace{\left(\frac{-n}{\|x-y\|^n} + \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{\|x-y\|^{n+2}} \right)}_{=0} = 0$$

und es folgt die Behauptung. ■

Aufgabe 25: *Zeige, dass es eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *welche die* Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = -t\varphi(t)$$

mit so genannter Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *erfüllt.*

LÖSUNG: Die Existenz wird durch die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

gezeigt. Ist nun $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung der Differentialgleichung, so folgt wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi(t)}{e^{-\frac{1}{2}t^2}}\right) \overset{\text{Quot.regel}}{=} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) - (-te^{-\frac{1}{2}t^2})\psi(t)}{(e^{-\frac{1}{2}t^2})^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) - (-t\psi(t))}{e^{-\frac{1}{2}t^2}} \overset{\text{Vor.}}{=} 0,$$

dass die Quotientenfunktionen $\psi(t)/e^{-\frac{1}{2}t^2}$ konstant sein muss. Wegen der Anfangsbedingung $\psi(0) = 1$ ist sie konstant 1, d.h. $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Aufgabe 26: *Berechne die Fourier-Transformierte der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

LÖSUNG: Für festes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-ixt}$$

als stetige durch 1 beschränkte Funktion auf einer offenen Menge Lebesgue-integrierbar, und weiterhin ist für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-ixt}$$

differenzierbar mit stetiger auf $\mathbb{R}$ beschränkter, d.h. Lebesgue-integrierbarer Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t}g_x(t) = -ixe^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-ixt}$$

Dann gilt für die Fourier-Transformierte G von f, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}G(t) &\overset{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-ixt}d\mu(x)\right) \\
&\overset{\text{Satz}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-ixt}d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} -xe^{-\frac{1}{2}x^2}ie^{-ixt}d\mu(x) \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[e^{-\frac{1}{2}x^2}ie^{-ixt}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}i(-it)e^{-ixt}d\mu(x)\right) \\
&= 0 - \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-itx}d\mu(x) \quad = \quad -tG(t) \quad \overset{\text{A25}}{\Rightarrow} \quad G(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Aufgabe 27: *Sei*

$$D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\}.$$

Zeige für $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\int_{D^2} \|x\|^\alpha d\mu(x)$$

genau dann endlich ist, wenn $\alpha + 2 > 0$ gilt und berechne in diesem Fall den Wert des Integrals.

LÖSUNG: „$\Rightarrow$" Sei $\int_{D^2} \|x\|^\alpha d\mu(x)$ endlich, d.h. $f(x,y) := (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ ist Lebesgue-integrierbar. Durch Polarkoordinaten ist ein Diffeomorphismus

$$P : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathrm{Inn}(D) \setminus ((-1,1) \times \{0\}), \quad (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

gegeben.[3] Da $\mathrm{Inn}(D) \setminus (-1,1) \times \{0\}$ sich von D nur um die Nullmenge $\partial D^2 \cup ((-1,1) \times \{0\}) = S^1 \cup ((-1,1) \times \{0\})$ unterscheidet, folgt aus der Maßtransformationsformel

$$\begin{aligned}
\int_D \|x\|^\alpha d\mu(x) &= \int_{\mathrm{Inn}(D)\setminus((-1,1)\times\{0\})} \|x\|^\alpha d\mu(x) \\
&\overset{\text{MTF}}{=} \int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r \cdot \|(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\|^\alpha d\mu(\varphi, r) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \left(\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\right)^\alpha d\varphi\, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot r^\alpha d\varphi \\
&= \int_0^1 2\pi r^{\alpha+1} dr \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon 2\pi r^{\alpha+1} dr \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{\alpha+2} 2\pi r^{\alpha+2}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} \text{nicht definiert} & \text{falls } \alpha+2=0 \\ -\infty & \text{falls } \alpha+2<0 \\ \frac{2\pi}{\alpha+2} & \text{falls } \alpha+2>0 \end{cases}
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$" Ist umgekehrt $\alpha+2>0$, so zeigt dieselbe Rechnung, dass das Integral $\int_{D^2} \|x\|^\alpha d\mu(x)$ endlich ist. ■

Aufgabe 28: *Zeige mit einem Konvergenzsatz aus der Vorlesung, dass die* Riemann'sche Zetafunktion

$$\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$$

stetig ist.

[3]Denn $r\cos\varphi = r'\cos\varphi'$ und $r\sin\varphi = r'\sin\varphi' \Rightarrow (r\cos\varphi)^2 = (r'\cos\varphi')^2$ und $(r\sin\varphi)^2 = (r'\sin\varphi')^2$ $\Rightarrow r^2 = r^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)) = r'^2(\cos^2(\varphi')+\sin^2(\varphi')) = r'^2$, d.h. wegen $r, r' > 0$ folgt $r = r'$. Dividiere beide Gleichungen durch $r = r'$. Betrachte $\cos\varphi = \cos\varphi'$. Falls $\varphi = \pi$, gilt auch $\varphi' = \pi$. Andernfalls gilt ohne Einschränkung $\varphi \in (0,\pi)$ und $\varphi' \in (\pi, 2\pi)$. Wegen $\sin\varphi = \sin\varphi'$ muss aber dann $\varphi = \varphi'$ gelten, denn $\sin|_{(0,\pi)} > 0$ und $\sin|_{(\pi,2\pi)} < 0$. Daraus folgt die Injektivität.

Ist nun $(x,y) \in \mathrm{Inn}(D) \setminus ((-1,1)\times\{0\})$ gegeben, definiere $r := \sqrt{x^2+y^2}$. Es gilt $r > 0$, denn $(0,0) \notin \mathrm{Inn}(D) \setminus ((-1,1)\times\{0\})$. Setze $\varphi := \delta_{\mathrm{sgn}(y),-1}\pi + \arccos(x/r)$. Dann gilt $\varphi \in (0,2\pi)$ und $P((r,\varphi)) = (x,y)$. Daraus folgt die Surjektivität.

Die Funktionaldeterminante von P berechnet sich zu $r \neq 0$, d.h. P ist lokaler Diffeomorphismus.

LÖSUNG: Definiere

$$g_k : [1, \infty) \times (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, s) \mapsto \lfloor x \rfloor^{-s} \cdot \mathbf{1}_{[1,k+1)}(x),$$

wobei $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}_0$ den ganzzahligen Anteil von $x \in (0, \infty)$ bezeichnet. Für festes s ist (g_k) ist eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen

$$g : [1, \infty) \times (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, s) \mapsto \lfloor x \rfloor^{-s}.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz oder auch nach dem Satz über majorisierte Konvergenz oder direktes Nachrechnen ist g Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{[1,\infty)} g_k(x, s) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{k} n^{-s} \quad \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad \zeta(s) = \int_{[1,\infty)} g(x, s) d\mu(x).$$

Sei nun $s > 1$, und (s_m) eine beliebige Folge mit $s_m \to s$ für $m \to \infty$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $s - \varepsilon > 1$ und es gibt $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $s_m \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ für alle $m > m_0$.
Sei $m > m_0$. Durch $(g(\cdot, s_m))$ ist eine Folge integrierbarer Funktionen gegeben, die wegen

$$\lim_{m\to\infty} g(x, s_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} g_k(x, s_m) \stackrel{g_k(x,\cdot) \text{ stet.}}{=} \lim_{k\to\infty} g_k(x, s) = g(x, s)$$

punktweise für jedes x gegen $g(\cdot, s)$ konvergiert, und wegen

$$g(x, s_m) = \lfloor x \rfloor^{-s_m} \leq \lfloor x \rfloor^{s-\varepsilon} = g(x, s - \varepsilon)$$

wird sie durch die Lebesgue-integriebare Funktion $g(\cdot, s - \varepsilon)$ majorisiert. Es folgt

$$\lim_{m\to\infty} \zeta(s_m) = \lim_{m\to\infty} \int_{[1,\infty)} g(x, s_m) d\mu(x) \stackrel{\text{Maj. Konv.}}{=} \int_{[1,\infty)} g(x, s) d\mu(x) = \zeta(s)$$

und damit die Stetigkeit von ζ mit dem Folgenkriterium. ■

Blatt 8 J. Lohkamp/M. Förster
WS 2004/05 Abgabe: Montag, 13.12.2004, 8:15 Uhr

Aufgabe 30: *Es sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

1. *Eine Teilmenge $A \subset U$ ist genau dann messbar, wenn $f(A) \subset V$ messbar ist; und für allen messbaren Teilmengen $A \subset U$ gilt $\mu(A) = \mu(f(A))$.*

2. *Für den Betrag der Funktionaldeterminante gilt $|J_x(f)| = 1$ für alle $x \in U$.*

LÖSUNG: „⇒" Nach der Maßttransformationsformel gilt

$$\int_A |\det J_x(f)|\, d\mu(x) \stackrel{\text{MTF}}{=} \int_{f(A)} d\mu(x) = \mu(f(A)) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \mu(A) \int_A d\mu(x),$$

d.h. $|J_x f| = 1$ für fast alle x. Nun sind 1 und $|J_x f|$ stetig, und es folgt $|J_x f| = 1$ für alle $x \in U$ nach Aufgabe 15, Teil 2.
„$\Leftarrow$" Falls $\int_A |J_x f| d\mu(x) = \int_A d\mu(x)$ existiert, folgt mit der Maßttransformationsformel $\mu(A) = \mu(f(A))$. ■

Aufgabe 32: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n < m$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.*

LÖSUNG: Nach dem Lemma von Sard ist die Menge

$$\{f(x) \mid \text{Rang } D_x f < m\}$$

der *singulären Werte* eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$. Da $D_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, folgt Rang $D_x f \leq n < m$, d.h. $f(x)$ ist singulärer Wert für alle $x \in U$. Das bedeutet, dass

$$\text{Bild } f \subset \{\text{singuläre Werte}\}$$

ebenfalls eine Nullmenge sein muss. Insbesondere folgt Bild $f \neq \mathbb{R}^m$, d.h. f kann nicht surjektiv sein. ■.