Aufgaben zur Vorlesung

Analysis IV

Blatt 1 — J. Lohkamp

SS 2005 — Abgabe: Montag, 18. April 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 1: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes glatt berandetes Gebiet und $\omega = x\,dy - y\,dx$. Berechne $\int_{\partial G} \omega$ und bestimme damit die Fläche des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2: Die klassische Formulierung des Gaußschen Integralsatzes lautet

$$\int_G \operatorname{div} X \, dV = \int_{\partial G} \langle X, \nu \rangle \, dA,$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Kompaktum, X ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ und ν das äußere Einheitsnormalenfeld von G ist. Zeige damit die Green'schen Formeln:

$$\int_G f \cdot \triangle g \, dV + \int_G \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dV = \int_{\partial G} f \, \langle \nabla g, \nu \rangle \, dA$$

$$\int_G (f \cdot \triangle g - g \cdot \triangle f) \, dV = \int_{\partial G} f \, \langle \nabla g, \nu \rangle - g \, \langle \nabla f, \nu \rangle \, dA$$

Aufgabe 3: Sei $\alpha > n - 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ für $i = 1 \ldots n$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$. Bestimme

$$\lim_{r \to \infty} \int_{B_r(0)} \triangle f \, dV,$$

wobei $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ den Ball von Radius r im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.