Aufgaben zur Vorlesung

Analysis IV

Blatt 2 — J. Lohkamp
SS 2005 — Abgabe: Montag, 25. April 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 4: Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig.

1. Zeigen Sie: Ist $A \subset X$ kompakt, so ist $f(A) \subset Y$ kompakt.
2. Zeigen Sie: Ist X kompakt und A abgeschlossen in X, so ist A kompakt.
3. Zeigen Sie: Ist X ein Hausdorff-Raum und $A \subset X$ kompakt, so ist A abgeschlossen in X.
4. Gilt auch folgende Aussage: Ist A abgeschlossen in X, so ist $f(A)$ abgeschlossen in Y?

Aufgabe 5: Ein topologischer Raum heisst *zusammenhängend*, falls er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer offener Teilmengen ist. Zeigen Sie:

1. Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{Z}$ konstant ist (hierbei ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ natürlich mit der Teilraumtopologie versehen).
2. Das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

Aufgabe 6:
Seien X, Y topologische Räume, X kompakt, Y Hausdorff-Raum.

1. Zeigen Sie: Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist f schon ein Homöomorphismus. (Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass f abgeschlossene Mengen in X auf abgeschlossene Mengen in Y abbildet.)
2. Zeigen Sie: Die Abbildung $f : [0, 2\pi) \to S^1 \subset \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$ ist stetig und bijektiv, aber **kein** Homöomorphismus.
3. Sind folgende Räume homöomorph: S^1 und $[0, 1)$, $[0, 1]$ und $\mathbb{R}$ bzw. $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$?

Hinweis: Suchen Sie, um zu zeigen, dass zwischen zwei topologischen Räumen **kein** Homöomorphismus existiert, nach "topologischen" Eigenschaften, die nur einer der beiden Räume besitzt.