Aufgaben zur Vorlesung

Analysis IV

Blatt 4 — J. Lohkamp

SS 2005 — Abgabe: Montag, 9. Mai 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 12: Zeigen Sie, dass der Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 13: Zeigen Sie, dass die Gruppe $O(n)$ der orthogonalen Matrizen eine Mannigfaltigkeit ist. Wieviele Zusammenhangskomponenten hat $O(n)$? Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n)$, $A \mapsto A \cdot A^T$, wobei $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ den Raum der reellen $n \times n$-Matrizen und $\mathrm{Sym}(n)$ den Unterraum der symmetrischen reellen $n \times n$-Matrizen bezeichnet.

Aufgabe 14: Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Mit Hilfe der natürlichen Projektion $p : X \to X/\sim$ definieren wir eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $X/\sim$ durch

$$Y \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow p^{-1}(Y) \text{ offen in } X.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$ definiert (die sogenannte Quotiententopologie) bezüglich derer p stetig ist. Betrachten Sie die beiden im Bild unten angedeuteten Äquivalenzrelationen $\sim_1, \sim_2$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass einer der beiden Quotientenräume $X/\sim_1$ bzw. $X/\sim_2$ hausdorffsch ist, der andere nicht.