Aufgaben zur Vorlesung
Analysis IV

Blatt 5 — J. Lohkamp
SS 2005 — Abgabe: Montag, 23. Mai 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 15: Finden Sie Vektorfelder auf S^2 mit genau einer bzw. genau zwei Nullstellen.

Aufgabe 16: Auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = \pm\, y.$$

Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{R}P^n := S^n/\sim$ versehen mit der Quotiententopologie eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie weiter, dass S^1 und $\mathbb{R}P^1$ diffeomorph sind.

Aufgabe 17: Eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit M ist eine Familie von Orientierungen $\{o_p\}_{p\in M}$ der Tangentialräume T_pM, so dass es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $\varphi : V \to U$ gibt, so dass für alle $q \in V$ die Ableitung $D\varphi_q$ die Orientierung o_q in die Standardorientierung $[(e_1, \dots, e_n)]$ von $\mathbb{R}^n$ überführt. Zeigen Sie: eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas $\mathcal{A}$ von M existiert, so dass die Ableitungen der Kartenwechsel überall positive Determinante haben.

Aufgabe 18: Zeigen Sie:

1. S^n ist orientierbar.
2. $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn die Abbildung $-Id : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ orientierungserhaltend ist.
3. Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

Aufgabe 19: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\nu_pM := (T_pM)^\perp$ (das orthogonale Komplement von T_pM). Zeigen Sie, dass $\nu_M := \bigcup_{p\in M} \nu_pM$ ein Vektor(raum)bündel über M ist. Zeigen Sie, dass die direkte Summe $TS^n \oplus \nu S^n$ trivial, d.h. isomorph zu $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Aufgabe 20: Ein einfacher Einbettungssatz für kompakte Mannigfaltigkeiten:
Sei M^n eine kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem endlichen Atlas $\mathcal{A} = \{\, \varphi_k : V_k \to U_k \,|\, k = 1, \dots, l\,\}$, wobei $U_k = B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$ für alle k und $\{\, \varphi_k^{-1}(B_1(0)) \,|\, k = 1, \dots, l\,\}$ bereits M überdecke (die Existenz eines solchen Atlas dürfen Sie glauben). Weiter sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit

$$\psi|_{B_1(0)} = 1, \quad 0 \le \psi|_{B_2(0)\setminus B_1(0)} \le 1 \quad \text{und} \quad \psi|_{\mathbb{R}^n\setminus B_2(0)} = 0.$$

Weiter seien $\psi_k := \psi \circ \varphi_k : M \to \mathbb{R}$ und $h_k := \psi_k \cdot \varphi_k : M \to \mathbb{R}^n$ (beide Abbildungen lassen sich von V_k auf ganz M durch 0 fortsetzen).
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\to \prod_{k=1}^{l} \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{l} \mathbb{R}, \\ p &\mapsto (h_1(p), \dots, h_l(p), \psi_1(p), \dots, \psi_l(p)) \end{aligned}$$

eine Einbettung ist.