Aufgaben zur Vorlesung

Analysis IV

Blatt 7 | J. Lohkamp
SS 2005 | Abgabe: Montag, 6. Juni 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 24: Sei M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein Diffeomorphismus $\varphi : M \to M$ mit $\varphi(p) = q$ existiert. Hinweis: Konstuieren Sie zunächst zu zwei beliebigen Punkten $p, q \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ einen Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^n$, der p auf q abbildet und auf $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ die Identität ist.

Aufgabe 25: Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld, ϕ^X sein Fluß und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie: Für den Fluß ϕ^Y des durch $Y(F(p)) := DF_p(X(p))$ definierten Vektorfeldes Y auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi_t^Y(F(p)) = F(\phi_t^X(p)).$$

Was bedeutet dies geometrisch für die Integralkurven der Vektorfelder X und Y?

Aufgabe 26: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und X ein differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, das längs M tangential an M ist, d.h. $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie, dass Integralkurven von X, die in M starten, ganz in M verlaufen. Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 um das Problem in eine Standardsituation zu überführen.

Aufgabe 27: Gibt es Vektorfelder ohne Nullstelle auf $O(n)$?