Aufgaben zur Vorlesung
Analysis IV

Blatt 11 — J. Lohkamp
SS 2005 — Abgabe: Montag, 4. Juli 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 40: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Aufgabe 41: Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant.

Aufgabe 42: Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$. Muss f vielleicht sogar surjektiv sein? Hinweis: Finden Sie eine holomorphe Abbildung, die $\mathbb{C} \setminus B_1(0)$ bijektiv auf $\overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$ abbildet.

Aufgabe 43: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ und

$$M(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

wobei wir M als Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ in sich betrachten, d.h. falls der Nenner in z_0 verschwindet setzen wir $M(z_0) := \infty$. Abbildungen dieser Form heissen auch *Möbiustransformationen.*

Zeigen Sie: Möbiustransformationen sind (wo der Nenner nicht verschwindet) holomorph und zu beliebigen $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ und $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es eine Möbiustransformation, so dass $M(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.