Aufgaben zur Vorlesung

Analysis IV

Blatt 13 — J. Lohkamp

SS 2005 — Abgabe: Montag, 18. Juli 2005; 8:00 Uhr

Aufgabe 48: Sei $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um 90 Grad, also $J(x,y) = (-y,x)$, und $c : (a.b) \to \mathbb{R}^2$ eine (C^∞–) differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^2$. Die *Krümmung* von c zur Zeit $t \in (a,b)$ ist definiert durch

$$\kappa_c(t) := \frac{\langle \ddot{c}, J\dot{c}\rangle}{|\dot{c}|^3}.$$

Zeigen Sie:

1. κ_c ändert sich nicht unter *orientierungserhaltender* Umparametrisierung und ändert bei Umkehrung der Orientierung das Vorzeichen. Für den ersten Teil ist also zu zeigen: Ist $\varphi : (c,d) \to (a,b)$ eine differenzierbare Funktion mit $\varphi' > 0$ für alle $s \in (c,d)$ und setzen wir $\tilde{c} := c \circ \varphi$, so gilt $\kappa_{\tilde{c}}(s) = \kappa_c(\varphi(s))$.

2. Bestimmen Sie die Krümmung eines Kreises von Radius $R > 0$.

Aufgabe 49: Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit (Fläche), $U \subset M$ offen und $\nu : U \to \mathbb{R}^3$ ein lokales nirgends verschwindendes Normalenfeld von M (d.h. $\nu(p) \perp T_pM$ und $\nu(p) \neq 0$ für alle $p \in U$). Die Weingartenabbildung von M im Punkt p bezüglich ν ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} A_\nu &: T_pM \to T_pM \\ A_\nu(v) &= (D\nu(v))^\top, \end{aligned}$$

also die tangentiale Komponente der Ableitung von ν in Richtung $v \in T_pM$. Die Weingartenabbildung misst also Veränderung des Normalenvektors („aus Sicht der Fläche“).

(a) Zeigen Sie: $A_{f\cdot\nu} = f \cdot A_\nu$ für jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.

(b) Wir normieren nun ν, so dass $\|\nu\| \equiv 1$ und definieren die *Krümmung* von M in $p \in U$ durch $K(p) := \det A_\nu$. Zeigen Sie, dass $K(p)$ wohldefiniert ist und bestimmen Sie die Krümmung der Sphäre von Radius R im $\mathbb{R}^2$.

(c) Sei wie oben $\|\nu\| \equiv 1$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A_ν folgende geometrische Bedeutung haben: Schneidet man die Fläche M mit Ebenen durch p, die $\nu(p)$ enthalten, so erhält man lokal (nahe p) Kurven in diesen Ebenen. Die Eigenwerte der Weingartenabbildung sind gerade (bis evtl. aufs Vorzeichen) die minimale und maximale Krümmung all dieser Kurven in p. Hinweis: $0 = D\langle \nu, Y\rangle = \langle D\nu, Y\rangle + \langle \nu, DY\rangle$ für ein Normalenfeld ν und ein tangentiales Vektorfeld Y.

Aufgabe 50: Sei M eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $p \in M$ gibt, so dass $K(p) > 0$ gilt.