Aufgabe 40:
Es seien $a, b > 0$ gegeben. Die Lichtgeschwindigkeit in der oberen Halbebene des $\mathbb{R}^2$ sei konstant. Ein vom Punkt $P = (0, a)$ ausgehender Lichtstrahl wird im Punkt $R = (x_0, 0)$ an der x-Achse reflektiert und im Punkt $Q = (1, b)$ beobachtet. Dabei besagt das Fermatsche Prinzip, daß ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten stets den Weg der kürzesten Laufzeit nimmt.

(a) Nehmen Sie an, ein hypothetischer vom Punkt $P = (0, a)$ ausgehender Lichtstrahl würde in einem Punkt $R = (x, 0)$ (mit $0 \le x \le 1$) an der x-Achse reflektiert und im Punkt $Q = (1, b)$ beobachtet. Geben Sie die Funktion $T(x)$ für die Laufzeit T eines solchen hypothetischen Lichtstrahls in Abhängigkeit von x an.

(b) Gemäß dem Fermatschen Prinzip nimmt die unter (a) gefundene Laufzeit T für x_0 ihr Minimum an. Leiten Sie daraus die Regel "Einfallswinkel = Ausfallswinkel" ab.

Aufgabe 41:
Es seien $a, b > 0$ gegeben. Die Lichtgeschwindigkeit in der oberen Halbebene des $\mathbb{R}^2$ sei konstant $c_+ = c_0/n_+$, in der unteren Halbebene konstant $c_1 = c_0/n_-$. (Dabei ist c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, n_+ bzw. n_- der Brechungsindex der oberen bzw. unteren Halbebene.) Ein vom Punkt $P = (0, a)$ ausgehender Lichtstrahl wird im Punkt $R = (x_0, 0)$ an der x-Achse gebrochen und im Punkt $Q = (1, -b)$ beobachtet. Benutzen Sie das Fermatsche Prinzip, um das Snelliussche Brechungsgesetz abzuleiten:

$$\frac{\sin(\text{“Einfallwinkel”})}{\sin(\text{“Ausfallswinkel”})} = \frac{n_-}{n_+}.$$

(Hinweis: Verfahren Sie analog zu Aufgabe 40.)

Aufgabe 42:
Die Höhe $h(t)$ (in m) eines dem Gravitationsfeld der Erde nahe der Erdoberfläche ausgesetzten Körpers erfüllt folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{h}(t) = -g,$$

wobei die Erdbeschleunigung konstant als $g = 9.81$ (in m/s^2) angenommen werden kann.

(a) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung durch Integration. Ist Ihre Lösung durch die Differentialgleichung eindeutig bestimmt? Wenn nicht, geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung in allgemeiner Form an.

(b) Ein Schneeball wird aus einem Fenster des Mathematischen Instituts in $h(0) = 25\,m$ Höhe mit einer Abwurfgeschwindigkeit von $\dot{h}(0) = 5\,m/s$ senkrecht nach unten geworfen. Geben Sie seine Höhe $h(t)$ (in m) als Funktion der Zeit t (in s) an. Wie lange dauert es, bis der Schneeball auf dem Hof landet.

Aufgabe 43: (siehe W. Scharlau: *Mathematik für Naturwissenschaftler*, S. 109)
Die Dicke einer Eisschicht auf einer Wasserfläche wächst näherungsweise nach folgender Formel:

$$\dot{y}(t) = \frac{-T}{4\,y(t)}.$$

Dabei sind die jeweiligen Zahlenwerte für die Dicke $y(t)$ in cm, die Zeit t in h und für die als konstant und negativ angenommene Umgebungstemperatur T in $^\circ C$ zu nehmen.

(a) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung in allgemeiner Form an.
(Hinweis: $y(t) = \sqrt{t+a}$ ist eine Lösungen für $\dot{y}(t) = \dfrac{1}{2\,y(t)}$.)

(b) Zur Zeit $t_0 = 0$ habe das Eis die Dicke $y(t_0) = 5$ cm, die Umgebungstemperatur T sei konstant -4 °C. Nach wie vielen Stunden ist die Dicke des Eises auf 6 cm angewachsen?

(c) Skizzieren Sie im selben Schaubild die Graphen der Funktion $y(t)$ bei den Temperaturen $T_1 = -4$ °C, $T_2 = -8$ °C und $T_3 = -12$ °C, jeweils für die Anfangsdicke $y(t_0) = 5$ cm. (Sie können das Schaubild auch mit Hilfe von *mathematica* erstellen.)