1 Zahlen und Rechnen mit Zahlen

Zahlen dienen im allgemeinen zum Messen, zum Beispiel zur Angabe physikalischer Größen, oder auch zum Ausdrücken von Verhältnissen oder Veränderungen, wie *2,71 mal größer* oder *5,3% Wachstum*. Je nachdem was man messen möchte, benötigt man verschiedene Zahlenmengen.

1.1 Die wichtigsten Zahlbereiche

Eine der einfachsten Zahlenmengen ist die Menge der *natürlichen Zahlen*. Sie wird bezeichnet mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Mit den natürlichen Zahlen kann man Größen endlicher Mengen „messen", wie z.B. Äpfel, Birnen, Autos, Bücher.

Es bestehen unterschiedliche Ansichten, ob man auch die *Null* zu den natürlichen Zahlen rechnen soll. In dieser Vorlesung wird sie als nicht zu den natürlichen Zahlen gehörig betrachtet. Es ist jedoch zweckmäßig, auch für die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null eine Bezeichnung einzuführen, nämlich

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

In den natürlichen Zahlen sind nur die Rechenoperationen *Addition* $(+)$ und *Multiplikation* $(\cdot)$ unbegrenzt ausführbar. Die übrigen Grundrechenarten *Subtraktion* $(-)$ und *Division* $(:)$ kann man nicht immer in den natürlichen Zahlen ausführen. Daher erweitern wir die Menge der natürlichen Zahlen zunächst zur Menge der *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

In den ganzen Zahlen sind die Rechenoperationen *Addition* $(+)$, *Subtraktion* $(-)$ und *Multiplikation* $(\cdot)$ unbegrenzt ausführbar. Es gelten die bekannten Rechenregeln. Eine wichtige Rechenregel ist „minus $\times$ minus $=$ plus":

$$(-2) \cdot (-10) = 2 \cdot 10, \quad -(-7) = 7.$$

Die ganzen Zahlen genügen uns aber noch nicht. Uns fehlt noch die *Division* $(:)$, die in den ganzen Zahlen nicht unbegrenzt ausführbar ist. Wir erweitern unsere Zahlenmenge daher nochmals zu den *rationalen Zahlen*. Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller *Brüche*, also etwa

$$\frac{3}{7}, \quad \frac{-4}{8}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{14}{21}.$$

In einem Bruch sind *Zähler* und *Nenner* ganze Zahlen, jedoch darf der Nenner nicht 0 sein, da man nicht durch 0 dividieren darf. Ein Bruch darf *gekürzt* werden, wenn Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor enthalten.

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Hier sind nun alle Grundrechenarten unbegrenzt ausführbar (außer der Division durch 0). Zahlenmengen, in denen die vier Grundrechenarten definiert und unbegrenzt ausführbar sind, bezeichnet man als *Körper*.

Auch in den rationalen Zahlen kann man noch nicht mit der Freiheit rechnen, die man gerne hätte. Die Gleichung $x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar; $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Allgemeiner ist die Wurzel einer rationalen Zahl fast nie eine rationale Zahl. Auch die Kreiszahl π, mit deren Hilfe man Kreisumfang und Kreisfläche ausdrückt, oder die Zahl e, die Basis des „natürlichen Logarithmus", sind keine rationalen Zahlen. Die rationalen Zahlen haben gewissermaßen noch Lücken.

Man erweitert die rationalen Zahlen deshalb zum Körper der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. Reelle Zahlen sind *unendliche Dezimalbrüche*, wie z.B.

$$4{,}2372\ldots.$$

Die Punkte sollen dabei andeuten, daß die Zahl „immer weitergeht", also unendlich viele Stellen hat, die man natürlich nicht alle hinschreiben kann.

Eine exakte Einführung der reellen Zahlen ist nicht ganz einfach und interessiert eigentlich nur Mathematiker und Studierende der Mathematik.

Eine häufig benutzte, geometrische Darstellung der reellen Zahlen ist die *Zahlengerade* (auch *Zahlenstrahl*). Man stelle sich eine Gerade vor, auf der irgendwo der „Nullpunkt" festgelegt ist. In der einen Richtung (üblicherweise nach rechts) sind die positiven reellen Zahlen abgetragen, in der anderen Richtung die negativen. Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt auf der Zahlengerade und jedem Punkt genau eine Zahl. Die rationalen Zahlen liegen in dieser Darstellung zwar „dicht", bilden aber keine kontinuierliche Gerade.

Mit den reellen Zahlen haben wir alle benötigten Zahlenmengen beisammen. Alle Erweiterungsschritte hier noch einmal auf einen Blick:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2 Mittelwert, Streuung

Messungen sind oft mit Fehlern behaftet. Dann führt man häufig Meßreihen durch oder man benutzt mehrere Gegenstände zur Vermessung. Hat man etwa eine Größe x n-mal gemessen, so hat man n verschiedene Meßwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann interessiert man sich unter anderem für den *Durchschnittswert* oder *Mittelwert* ($\bar{x}$), der definiert ist als

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Wichtig ist auch, ein Maß dafür zu haben, wie sehr die Meßwerte um den Mittelwert „streuen“, d.h. ob die Abweichungen vom Mittelwert groß oder klein sind. Dazu benutzt man eine Größe, die man *Varianz* oder *Streuung* s^2 (oft auch σ^2) nennt, und die definiert ist als

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Die hierdurch ebenfalls definierte Größe s nennt man *Standardabweichung*. Der Vollständigkeit halber noch einmal exakt:

Zu n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ ist deren *Standardabweichung* s definiert als

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Wie man an dieser Formel erkennen kann, hat die Standard-Abweichung dieselbe physikalische Dimension wie die Meßgröße x selbst. Weichen die x_i stark voneinander - und damit von dem Mittelwert $\bar{x}$ ab, ist s groß; liegen alle x_i dicht beieinander, ist s klein.

Die Streuung berechnet man oft nach der Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\bar{x}^2\right).$$

Beweis: Es gilt (unter Verwendung der binomischen Formel):

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 2\bar{x}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\bar{x}^2\right).
\end{aligned}$$

Mittelwert und Streuung sind die einfachsten Begriffe der Statistik, die im zweiten Teil dieser Vorlesung behandelt wird.

Wir nutzen diese Gelegenheit, um sofort auf eine typische Fragestellung der Statistik hinzuweisen: Hat man, wie gerade beschrieben, eine Stichprobe genommen und den Mittelwert $\bar{x}$ berechnet, so stellt sich die Frage, wie sehr dieser Mittelwert $\bar{x}$ (der ja von der zufällig gewählten Stichprobe abhängt) von dem „wahren" Mittelwert μ der Grundgesamtheit abweicht. Die Statistik kann auf diese Frage eine Antwort geben. Weiter wird man annehmen, daß $\bar{x}$ den wahren Mittelwert μ um so besser approximiert, je größer die Stichprobe ist. Dies ist eine mathematische Tatsache, die sich *beweisen* läßt. Man erhält zugleich eine quantitative Auskunft darüber, wie sehr sich die Approximation verbessert, wenn z.B. die Größe der Stichprobe verdoppelt wird.

1.3 Potenzrechnen

Abgesehen von den Grundrechenarten ist das Potenzieren eine wichtige und oft benutzte Operation.

Wenn man eine reelle Zahl potenzieren will, ist bei einem natürlichen Exponenten noch klar, wie das geht. Für eine reelle Zahl y und eine natürliche Zahl n definiert man

$$y^n = y \cdot \ldots \cdot y \ (n \text{ Faktoren } y).$$

Sprechweise: „y hoch n".

Für das Potenzieren mit natürlichen Exponenten gelten einige Rechenregeln. Die wichtigsten sind

$$y^{n+m} = y^n y^m \qquad \text{und} \qquad (y^n)^m = y^{n \cdot m},$$

wobei y wieder eine beliebige reelle Zahl ist und n und m beliebige natürliche Zahlen sind. Von der Richtigkeit dieser Formeln kann man sich leicht durch ausführliches Aufschreiben überzeugen.

Das Potenzieren ist also (zunächst) nur eine abkürzende Schreibweise für die wiederholte Multiplikation einer Zahl mit sich selbst, aber wir erweitern die Definition nun auf ganze Exponenten.

Damit obige Rechenregeln auch bei ganzzahligen Exponenten ihre Gültigkeit behalten, muß

$$y^0 = 1$$

sein, denn es gilt

$$y^n = y^{n+0} = y^n y^0,$$

was bei $y^0 \neq 1$ nicht richtig wäre. Wir rechnen mit dieser Feststellung weiter und erhalten

$$1 = y^0 = y^{n-n} = y^n \cdot y^{-n}.$$

Also ist

$$y^{-n} = \frac{1}{y^n}.$$

Damit sind die Potenzen auch für negative ganze Exponenten definiert, und wir haben eine vollständige Definition für das Potenzieren mit ganzen Exponenten. Die obigen Rechenregeln gelten auch für beliebige *ganze* Zahlen n und m.

Bisher war das Potenzieren eine Rechnung, die sich auf die vier Grundrechenarten zurückführen läßt. Das ist bei rationalen Exponenten anders. Um definieren zu können, was $y^{\frac{n}{m}}$ bedeutet, müssen wir eine neue Rechenoperation einführen, nämlich die *Wurzel* oder das *Wurzelziehen*.

Zunächst definieren wir, was wir unter der *Quadratwurzel* $\sqrt{y}$ einer positiven Zahl y verstehen. Dies ist diejenige positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert wieder y ergibt, also

$$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y.$$

Zum Beispiel:

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots.$$

Beim Quadratwurzelziehen gibt es einige wichtige Regeln, die man beachten muß:

- Negative Zahlen haben *keine* Quadratwurzel, denn wegen der Regel „minus $\times$ minus $=$ plus“ ist ein Quadrat immer positiv.

- Jede positive reelle Zahl besitzt genau eine positive Quadratwurzel. Das ist vielleicht anschaulich klar, aber nicht selbstverständlich, sondern ein mathematischer Satz, der bewiesen werden müßte.

- Ist $x^2 = y$, so ist auch $(-x)^2 = y$, also besitzt die Gleichung $x^2 = y$ die zwei Lösungen $\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$. Um Verwechselungen oder Mißverständnisse zu vermeiden, wird unter der Quadratwurzel immer nur die *positive* Quadratwurzel verstanden.

Das Ziehen der Quadratwurzel ist also die Umkehroperation zum Quadrieren. Zum Potenzieren mit anderen natürlichen Exponenten (also x^n mit beliebigem natürlichen n) gibt es auch eine Umkehroperation. Diese wird mit $\sqrt[n]{y}$ bezeichnet (Sprechweise: *n-te Wurzel aus y*). Analog zur Quadratwurzel (d.h. für $n = 2$) ist $\sqrt[n]{y}$ als diejenige positive Zahl definiert, für die gilt:

$$\underbrace{\sqrt[n]{y} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{y}}_{n-\text{mal}} = y.$$

Die Wurzel hängt mit der Potenz durch die Gleichung

$$\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

zusammen, denn es gilt:

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = y^{\frac{1}{n}\cdot n} = y^{\frac{n}{n}} = y^1 = y.$$

$y^{\frac{1}{n}}$ ist also eine Zahl, deren n-te Potenz y ergibt. Das ist aber gerade die Definition von $\sqrt[n]{y}$.

Die Definition von Potenzen mit beliebigem rationalen Exponenten ist jetzt einfach:

$$y^{\frac{n}{m}} = \left(y^{\frac{1}{m}}\right)^n = (\sqrt[m]{y})^n$$

und

$$y^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{y^{\frac{n}{m}}}.$$

Die Rechenregeln $y^{a+b} = y^a y^b$, $(y^a)^b = y^{ab}$ gelten jetzt für beliebige rationale Exponenten a, b.

Die Definition von y^x mit beliebigem reellen x erfordert entschieden mehr Theorie. Die Idee dabei ist, die reelle Zahl x durch rationale Zahlen anzunähern. Diese Annäherung kann beliebig genau geschehen, so daß man dadurch y^x beliebig genau approximieren und damit definieren kann. Die Einzelheiten interessieren uns aber in dieser Vorlesung nicht.

Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen

Wir fassen die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Potenzen noch einmal zusammen. Dabei seien x und y beliebige positive reelle Zahlen, a und b beliebige reelle Zahlen und n eine beliebige natürliche Zahl.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (xy)^a & = & x^a y^a & \quad & x^{a+b} & = & x^a x^b & \quad & (x^a)^b & = & x^{ab} & \quad & x^0 = 1 \\ x^{-a} & = & \frac{1}{x^a} & & x^{\frac{1}{2}} & = & \sqrt{x} & & x^{\frac{1}{n}} & = & \sqrt[n]{x} & & \end{array}$$

Aufgabe: a) In einer bestimmten Tierpopulation sind 60 % ♀ und 40 % ♂. Die ♀ sind zu 13 % von einem Parasiten befallen, die ♂ zu 25 %. Was ist der Befall (in %) der Gesamtpopulation?

b) Was ist die allgemeine Lösung dieser Aufgabe (wenn für die Anteile von ♂, ♀ und Parasitenbefall beliebige Prozentzahlen gegeben sind)?

2 Logarithmen

2.1 Logarithmisches Rechnen

Für $x > 0$ ist der 10*er-Logarithmus* oder *dekadische Logarithmus* $\log x$ definiert als diejenige Zahl mit der man 10 potenzieren muß, um x zu erhalten, d.h. für die gilt

$$10^{\log x} = x.$$

Es ist also zum Beispiel

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 & \log(100) &= 2 \\ 10^3 &= 1000 & \log(1000) &= 3 \\ 10^{-1} &= 0{,}1 & \log(0{,}1) &= -1 \\ 10^{0{,}5} = \sqrt{10} &= 3{,}1623 & \log(3{,}1623) &= 0{,}5. \end{aligned}$$

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Rechenregeln

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \log x + \log y \\ \log\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log x \\ \log\left(x^n\right) &= n \log x \\ \log(1) &= 0. \end{aligned}$$

Wir beweisen die erste, aus der dann die anderen folgen: Es ist

$$10^{\log(xy)} = xy = 10^{\log x} 10^{\log y} = 10^{\log x + \log y},$$

also $\log(xy) = \log x + \log y$. Oft hat man Umrechnungen folgender Art auszuführen:
Sei $y = a + b \log x$. Was ist dann x ausgedrückt durch y? Nach den Rechenregeln für das Potenzrechnen ergibt sich

$$10^y = 10^{a + b\log(x)} = 10^a \cdot 10^{b \log x} = 10^a (10^{\log x})^b,$$

also $10^{y-a} = x^b$, d.h. $x = 10^{\frac{1}{b}(y-a)}$.
Man beachte immer, daß der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist.

2.2 Beispiele

Wir besprechen einige typische Beispiele für das Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

2.2.1 Verzinsung eines Kapitals

Dieses Beispiel wird schon auf der Schule behandelt (Stichwort: „Zinseszins-Rechnung“): Ein Kapital von 8000 € wird zu 3,5% jährlichen Zinsen angelegt. Auf welchen Betrag ist es nach 8 Jahren gewachsen?

Lösung: 3,5% Zinsen bedeuten ein jährliches Wachstum um den Faktor 1,035. Nach 8 Jahren beträgt das Kapital also

$$1{,}035^8 \cdot 8000 \text{ €} = 10534{,}47 \text{ €}.$$

2.2.2 „Exponentielles“ Bevölkerungswachstum

Frage: Zur Zeit beträgt die Weltbevölkerung ca. 6000 Millionen und das jährliche Wachstum ca. 1,4%. In wieviel Jahren ist die Weltbevölkerung auf
a) 10.000 Millionen, b) das Doppelte, c) das Tausendfache
gewachsen, wenn gleiches Wachstum unterstellt wird?

Lösung: 1,4% Zuwachs bedeutet eine jährliche Vermehrung um den Faktor 1,014. In n Jahren findet also eine Vermehrung um den Faktor $1{,}014^n$ statt.

a) Gesucht ist die Anzahl der Jahre n, für die

$$1{,}014^n \cdot 6000 = 10000 \text{ oder } 1{,}014^n = \frac{5}{3}$$

gilt. Logarithmieren dieser Gleichung ergibt

$$n \log(1{,}014) = \log(1{,}667),$$

also

$$n = \frac{\log(1{,}667)}{\log(1{,}014)} = 36{,}7.$$

Der gesuchte Zeitraum ist also 36,7 Jahre.

b) Gesucht ist wiederum n, diesmal mit

$$1{,}014^n = 2,$$

also

$$n = \frac{\log 2}{\log(1{,}014)} = 49{,}9.$$

In diesem Fall dauert es etwa 50 Jahre.

c) Man verfährt ähnlich wie in b) (Übungsaufgabe).

2.2.3 Halbwertszeit, ^{14}C-Methode zur Altersbestimmung

Von radioaktiven Stoffen zerfällt ein bestimmter Anteil je Zeiteinheit. Nach einer gewissen Zeit ist also nur noch die Hälfte der Anfangsmenge übrig. Diese Zeit nennt man *Halbwertszeit*.

Stoff	chemisches Symbol	Halbwertszeit
Plutonium	^{239}Pu	24340 Jahre
Uran	^{238}U	$4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre
Kohlenstoff	^{14}C	5730 Jahre

Wenn man weiß, in welcher Zeit ein bestimmter Anteil eines Stoffes zerfällt, kann man nun umgekehrt fragen, welcher Anteil in einem bestimmten Zeitraum zerfällt, z.B.

Frage: Welcher Anteil von ^{14}C zerfällt in 100 Jahren?

Lösung: Nach 100 Jahren hat sich die ursprüngliche Menge M um den Faktor x verkleinert, d.h. es ist noch $M \cdot x$ der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden. Nach 200, 300, ... Jahren sind also noch $M \cdot x^2$, $M \cdot x^3$, ... übrig. Nach 5730 Jahren ist demnach

$$M \cdot x^{57{,}3}$$

der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden, also

$$0{,}5 = x^{57{,}3}.$$

Logarithmieren ergibt

$$\log(0{,}5) = -0{,}3010 = 57{,}3 \cdot \log x$$

$$\Rightarrow x = 10^{\frac{-0{,}3010}{57{,}3}} = 0{,}9880.$$

Der Anteil, der in 100 Jahren zerfallen ist, ist $1 - x = 0{,}012$, was 1,2% entspricht. (Alternativ könnte man auch die „57, 3-te Wurzel" ziehen: $x = (0,5)^{\frac{1}{57,3}} \approx 0,988$.)

Der radioaktive ^{14}C-Zerfall wird zur Altersbestimmung in der Geologie, Paläontologie und Biologie bei Sedimenten, Fossilien etc. benutzt. Im Prinzip geht das so:

Organische Substanzen enthalten Kohlenstoff. Dieser besteht zu einem bestimmten Anteil aus dem radioaktiven Isotop ^{14}C ($6 \cdot 10^{10}$ ^{14}C-Atome pro g Kohlenstoff). Dieser Anteil bleibt während der Lebenszeit durch Austausch mit der Umgebung konstant. Nach dem Tod findet dieser Austausch nicht mehr statt, und der ^{14}C-Anteil verringert sich aufgrund des radioaktiven Zerfalls allmählich. Auf diese Weise kann man durch Messung des ^{14}C-Anteils (ungefähr) das Alter z.B. von fossilem Holz bestimmen. Die Methode funktioniert bis zu einem Alter von etwa 50000 Jahren.

2.2.4 Tonhöhe

Viele physikalische, chemische und biologische Größen werden *logarithmisch* gemessen. Auch Sinnesempfindungen, wie z.B. Tonhöhe oder Lautstärke, aber auch Kräfte und Gewichte werden oft logarithmisch wahrgenommen. Logarithmisch heißt, daß es nicht auf die absolute Differenz, sondern auf das Verhältnis der Maßgrößen ankommt. Ein instruktives Beispiel ist die Tonhöhe. Sie wird in Hertz (Hz) = Schwingungen pro Sekunde gemessen (physikalische Dimension also s^{-1}).

Wir betrachten drei Töne mit einer Frequenz von 500, 1000 bzw. 1500 Hertz. Diese Tonintervalle von jeweils 500 Hz werden *nicht* als gleich groß empfunden, denn das Intervall von 500 zu 1000 Hz ist eine *Oktave* (die Frequenz verdoppelt sich), aber das Intervall von 1000 zu 1500 Hz ist eine *Quinte* (die Frequenz erhöht sich um den Faktor $\frac{3}{2}$).

Zwei Tonintervalle von x zu y bzw. von x' zu y' werden als gleich empfunden, *nicht* wenn die Differenzen der Frequenzen gleich sind ($y - x = y' - x'$), sondern wenn die Verhältnisse gleich sind, d.h. wenn

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}.$$

Das bedeutet, daß die Differenzen der Logarithmen der Frequenzen gleich sind, da

$$\log\left(\frac{y}{x}\right) = \log y - \log x, \quad \log\left(\frac{y'}{x'}\right) = \log y' - \log x'.$$

Tonhöhen werden also zweckmäßigerweise durch den Logarithmus der Frequenz gemessen. (Die Tastatur eines Klaviers ist eine logarithmische Skala!)

Frage: Das eine Oktave umfassende Tonintervall von 1000 Hz bis 2000 Hz soll in 12 gleich große Halbtonschritte eingeteilt werden. Was sind die Frequenzen dieser Zwischentöne?

Lösung: Bei einem Halbtonschritt vergrößert sich die Frequenz jeweils um einen Faktor x, von 1000 auf $1000x$ auf $1000x^2$, usw. Nach 12 Schritten soll sich die Frequenz verdoppelt haben. Es muss also gelten

$$x^{12} = 2.$$

Ziehen der 12. Wurzel (oder entsprechende logarithmische Rechnung) ergibt $x = 2^{\frac{1}{12}} = 1,0595\ldots$. Die Frequenzen der Zwischentöne sind also 1000; $1000x = 1059{,}5$; $1000x^2 = 1122{,}5$; usw.

Bei der Stimmung von Instrumenten tritt jedoch ein Problem auf. Nach sieben Halbtonschritten sollte die (große) Quinte erreicht sein, die dem Faktor 1,5 entspricht. Es ergibt sich jedoch eine kleine Differenz:

$$1{,}0595^7 = 1{,}4983\ldots$$

Die Differenz zu 1,500 wird durch die sogenannte temperierte Stimmung ausgeglichen.

2.2.5 Schallintensität

Die Schallintensität I kann in Leistung/Fläche gemessen werden. Die Maßeinheit ist dann $\mathrm{W/m^2}$ (Watt pro Quadratmeter).

Das leiseste Geräusch, das das menschliche Ohr bei 1000 Hz gerade noch hören kann, entspricht einer Leistungseinstrahlung von etwa $10^{-12}\mathrm{W/m^2}$. Bei dem 10^{13}-fachen wird die Schmerzgrenze erreicht. Man verwendet ein logarithmisches Maß:

$$\text{Schallintensitätspegel} \quad L_I = (120 + 10 \cdot \log I)\mathrm{dB}$$

Dabei ist die Maßeinheit dB (=dezibel). Umgekehrt ist

$$I = 10^{(L_I - 120)/10}.$$

Eine Schallintensität von $10^{-6}\mathrm{W/m^2}$ entspricht also

$$120 + 10(-6) = 60 \text{ dB}.$$

Umgekehrt entspricht ein Schallintensitätspegel von 85 dB einer Schallintensität von

$$10^{-3{,}5} = 3{,}162 \cdot 10^{-4}\mathrm{W/m^2}.$$

(Das ist schon ein ziemlicher Krach!)

Frage: Im Hörsaal herrscht ein Schallintensitätspegel von

40 dB durch gleichmäßiges Gemurmel,
45 dB durch Geräusche von außen (z.B. Ventilator, Straßenverkehr).

Was ist der gesamte Lärm (=Schallintensitätspegel)?

Lösung: Zunächst müssen die Schallintensitätspegel in Schallintensität umgerechnet werden:

$$\begin{array}{lll} 40 \text{ dB} & \text{entspricht} & 10^{-8}\mathrm{W/m^2}, \\ 45 \text{ dB} & \text{entspricht} & 10^{-7{,}5}\mathrm{W/m^2}. \end{array}$$

Die gesamte Schallintensität ist also

$$I = 10^{-8}\mathrm{W/m^2} + 10^{-7{,}5}\mathrm{W/m^2} = 4{,}16 \cdot 10^{-8}\mathrm{W/m^2}.$$

Der Schallintensitätspegel ist also

$$\begin{aligned} L_I = \left(120 + 10 \cdot \log\left(4{,}16 \cdot 10^{-8}\right)\right) \text{ dB} &= (120 + 10(\log(4{,}16) - 8)) \text{ dB} \\ &= \ldots = 46{,}2 \text{ dB}. \end{aligned}$$

2.2.6 Fechner-Webersches Gesetz

Im Zusammenhang mit logarithmischem Messen ist das Fechner-Webersche Gesetz von Bedeutung. Es besagt, daß die kleinste wahrnehmbare Differenz bei Sinneseindrücken ein fester Prozentsatz der Stärke des Sinneseindrucks ist. Beispiel: Gewichte von 20 g und 21 g bzw. 100 g und 105 g bzw. 1000 g und 1050 g kann man in der Hand noch gerade unterscheiden.

Es kommt also nicht auf die absolute Differenz, sondern auf die Differenz der Logarithmen an.

$$\begin{aligned} \log(21) - \log(20) &= \log(1{,}05) \\ \log(105) - \log(100) &= \log(1{,}05) \\ \log(1050) - \log(1000) &= \log(1{,}05) \end{aligned}$$

Das Fechner-Webersche Gesetz gilt jedoch nur approximativ.

2.2.7 pH-Wert

Ein weiteres wichtiges Beispiel für logarithmisches Messen ist der pH-Wert. Der pH-Wert einer wässrigen Lösung ist der negative Logarithmus der Wasserstoffionen-Konzentration, genauer der Hydroniumionen-Konzentration. Die Hydroniumionen-Konzentration ist so definiert:

$$[H_3O^+] = \frac{\text{Zahl der } H_3O^+\text{-Ionen/Liter}}{N_L}.$$

Hierbei ist $N_L = 6,022 \cdot 10^{23}$ die Avogadrosche Zahl. Damit ist also

$$\text{pH} = -\log[H_3O^+].$$

Der pH-Wert einer neutralen Lösung (reines Wasser) ist 7, der pH-Wert von Säuren ist kleiner, der von Basen größer als 7. Daß reines Wasser einen pH-Wert von 7 hat, liegt daran, daß sich ein (sehr kleiner) Teil der H_2O-Moleküle in Hydronium- und Hydroxid-Ionen umwandelt:

$$H_2O + H_2O \leftrightarrows H_3O^+ + OH^-.$$

In neutralen Lösungen sind also beide Ionenarten gleich häufig. In sauren Lösungen sind die H_3O^+-Ionen häufiger, in basischen die OH^--Ionen. Es ist ein Naturgesetz, daß das Produkt der beiden Ionenkonzentrationen jedoch konstant ist:

$$[H_3O^+] \cdot [OH^-] = K_W.$$

Die Konstante K_W nennt man das *Ionenprodukt des Wassers.* Bei $22°C$ ist $K_W = 10^{-14}$. In neutralem Wasser ist also

$$[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}$$

denn $10^{-7} \cdot 10^{-7} = 10^{-14}$. Hieraus folgt, daß der pH-Wert von neutralem Wasser 7 ist. Wie erwähnt, entstehen bei Säuren zusätzlich H_3O^+-Ionen, z.B. bei Salzsäure

$$HCl + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + Cl^-$$

und umgekehrt in Basen zusätzlich OH^--Ionen, z.B. bei Ammoniak

$$NH_3 + H_2O \longrightarrow OH^- + NH_4^+.$$

Es ist eine interessante Frage, wie sich der pH-Wert beim Mischen von Lösungen verhält. Aus der Konstanz des Ionenproduktes folgt, daß die Hydroniumionen-Konzentration als das geometrische Mittel, der pH-Wert als das arithmetische Mittel berechnet wird. Genauer heißt das folgendes: Hat man m Liter mit einer Hydroniumionen-Konzentration von k und n Liter mit einer Konzentration von l, so hat das Gemisch die Konzentration

$$(k^m l^n)^{\frac{1}{m+n}}.$$

(Entsprechend für die Hydroxidionen-Konzentration.) Der pH-Wert des Gemisches ist demnach

$$-\log(k^m l^n)^{\frac{1}{m+n}} = -\frac{1}{m+n}(m \log k + n \log l),$$

also das (gewichtete) arithmetische Mittel der einzelnen pH-Werte.

2.2.8 Seismische Energie, Richter-Skala

Die bei einem Erdbeben freigesetzte *seismische Energie* wird auf der sogenannten Richter-Skala gemessen. Dabei handelt es sich um folgendes: Es sei E_s die seismische Energie (gemessen in Newtonmeter Nm). Die *Magnitude* M des Bebens wird dann durch folgende Formeln definiert bzw. berechnet:

$$\begin{aligned} \log E_s &= 4,8 + 1,5M \\ M &= \frac{2}{3}(\log E_S - 4,8) \\ E_s &= 10^{4,8} \cdot 10^{1,5M}. \end{aligned}$$

2.3 Logarithmen mit beliebiger Basis

Statt der Basis 10 kann man bei der Definition des Logarithmus eine beliebige positive Basis b zugrunde legen. Sei also b eine feste positive Zahl. Für jedes $x > 0$ ist der *Logarithmus zur Basis b*, geschrieben als $\log_b(x)$, definiert durch

$$x = b^{\log_b(x)}.$$

Insbesondere ist also $\log_b(b^n) = n$. Es gelten analoge Rechenregeln wie in 1.4. Tatsächlich unterscheidet sich $\log_b(x)$ vom dekadischen Logarithmus nur um den konstanten Faktor $(\log b)^{-1}$. Es ist nämlich

$$10^{\log(x)} = x = b^{\log_b(x)} = (10^{\log(b)})^{\log_b(x)} = 10^{\log(b)\log_b(x)},$$

so daß für alle x gilt:

$$\log_b(x) = \frac{1}{\log(b)} \log(x).$$

Die wichtigste Basis für ein Logarithmen-System ist die EULERsche Zahl $e = 2,71...$. Sie führt zu den sogenannten *natürlichen Logarithmen*, die später noch ausführlich besprochen werden.

In der Informationstheorie spielt der Logarithmus zur Basis 2, der sogenannte *dyadische* Logarithmus, eine große Rolle. Dies soll ganz kurz erklärt werden. Die Grundeinheit der Informations-Theorie ist das *bit*. Ein *bit* ist entweder 0 oder 1, also ein Element der Menge $\{0,1\}$. Der Informationsgehalt einer Nachricht ist die Zahl der *bits*, die benötigt werden, um die Nachricht zu übermitteln. Der Informationsgehalt einer natürlichen Zahl n ist nun ungefähr der dyadische Logarithmus $\log_2(n)$. Dies erkennt man an der dyadischen Darstellung von n, also der Darstellung als Summe von 2-Potenzen:

$$n = a_0 + a_1 2 + a_2 4 + \ldots + a_{k-1} 2^{k-1}, \quad a_i \in \{0,1\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, daß

$$2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

n ist durch die Folge der k *bits* $a_0, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig bestimmt, und es ist $k - 1 \leq \log_2(n) < k$, also $k \approx \log_2(n)$.

Wegen $1000 \approx 2^{10}$ enthalten 3-stellige Zahlen einen Informationsgehalt von 10 *bits*. Die deutsche Sprache kennt ungefähr $2^5 = 32$ Buchstaben und Satzzeichen. Jeder Buchstabe enthält also ungefähr 5 *bit* Information. Tatsächlich sind geschriebene Texte hochgradig *redundant* (ein Text bleibt noch verständlich, wenn man viele Zeichen wegläßt, z.B. die meisten Vokale). Die Informations-Theorie und Linguistik beschäftigt sich z.B. mit der Frage, wieviel Information ein Text „wirklich“ enthält.

Aufgabe: Zur Darstellung quantitativer Zusammenhänge benutzt man oft eine *logarithmische Darstellung* bzw. *logarithmische Skalen*. Was ist das? Suche in Lehrbüchern (aber auch Tageszeitungen, Broschüren etc.) Beispiele! Was ist der Effekt einer logarithmischen Skala? Warum benutzt man sie? Warum ist es sinnvoll, Aktienkurse (in sogenannten „Charts“) auf einer logarithmischen Skala anzugeben?

3 Grundbegriffe der analytischen Geometrie

3.1 Ebene und Raum

Wir erinnern an einige Grundtatsachen der *analytischen Geometrie der Ebene.* Zur Beschreibung geometrischer Objekte in der Ebene führt man zwei aufeinander senkrecht stehende Koordinatenachsen ein (i.a. x-Achse und y-Achse), die sich im Nullpunkt schneiden. Die Lage eines Punktes P_1 wird durch seine Koordinaten beschrieben (s. Abb. 3.1):

$$P_1 = P(x_1, y_1).$$

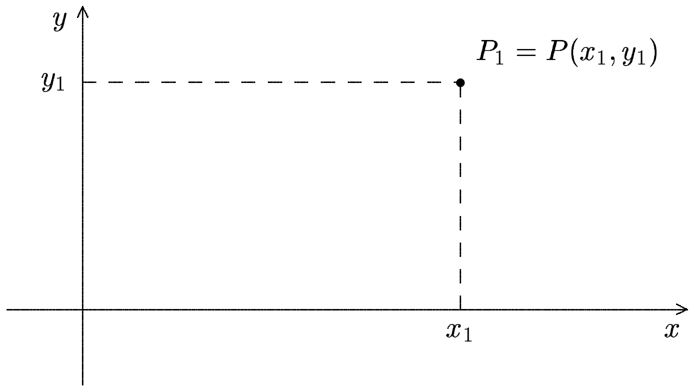

Abbildung 3.1 Ein Punkt in der Ebene

Der Abstand $d(P_1, P_2)$ von zwei Punkten $P_1 = P(x_1, y_1)$, $P_2 = P(x_2, y_2)$ kann mit dem Satz von PYTHAGORAS berechnet werden. Das Dreieck in Abb. 3.2 zeigt

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ein Punkt in der Ebene ist also gegeben durch ein *Paar* von reellen Zahlen (x, y). Deswegen identifiziert man die Ebene mit der Menge aller Zahlenpaare, die mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnet wird:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Punkte *sind* Elemente von $\mathbb{R}^2$, also Paare reeller Zahlen.

Im Raum geht alles völlig analog: Man hat drei Koordinaten-Achsen (i.a. x-, y- und z-Achse). Ein Punkt ist durch seine drei Koordinaten gegeben: $P = P(x, y, z)$. Der Abstand zweier Punkte $P_1 = P(x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = P(x_2, y_2, z_2)$ wird berechnet durch

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Die Menge aller Punkte im Raum ist

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Dies kann man ohne jedes Problem zum Begriff des *n-dimensionalen euklidischen Raumes* verallgemeinern: n sei eine beliebige natürliche Zahl und $(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-tupel reeller Zahlen. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \text{Menge aller } n\text{-tupel reeller Zahlen} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist $(-3, 4, 1, 7) \in \mathbb{R}^4$. Der n-dimensionale euklidische Raum *ist* diese Menge $\mathbb{R}^n$. Die Elemente dieser Menge heißen Punkte. Der Abstand zweier Punkte $P_1 = P(x_1, \ldots, x_n)$, $P_2 = P(y_1, \ldots, y_n)$ ist gegeben durch

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

(Man lasse sich nicht durch die unterschiedlichen Bezeichnungen der Koordinaten im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ x, y, z bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verwirren.)

3.2 Vektoren

Man kann die Elemente der Ebene $\mathbb{R}^2$, des Raumes $\mathbb{R}^3$ bzw. des n-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ auch anders interpretieren, nämlich als *Vektoren.*

In der Ebene geht das folgendermaßen: Zum Punkt $P = P(x, y)$ gehört der Verbindungsvektor vom Nullpunkt zu P, den man sich als gerichtete Strecke von 0 nach P vorstellt (s. Abb. 3.3). Dieser Vektor ist allein durch die Koordinaten x, y festgelegt. Vorläufig wollen wir für ihn die Bezeichnung

$$\overrightarrow{0P} = (x, y)$$

verwenden. Die *Länge* oder *Norm* des Vektors ist

$$\| \overrightarrow{0P} \| = d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Analog ist die Norm des Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ im $\mathbb{R}^n$ gleich $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Vektoren sind also Größen, die eine „absolute“ Größe (Länge, Stärke, ...) und eine Richtung haben. Viele physikalische Größen sind Vektoren:

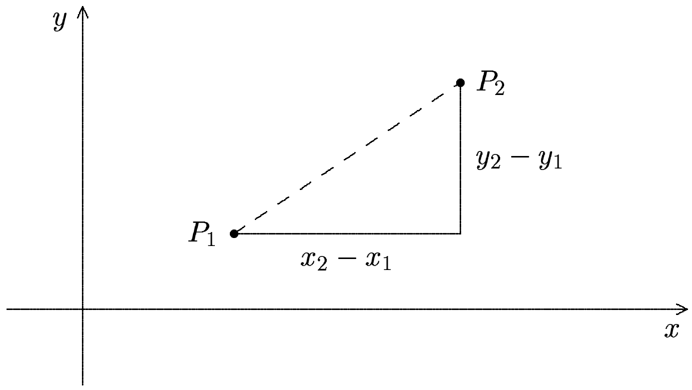

Abbildung 3.2 Abstand zweier Punkte

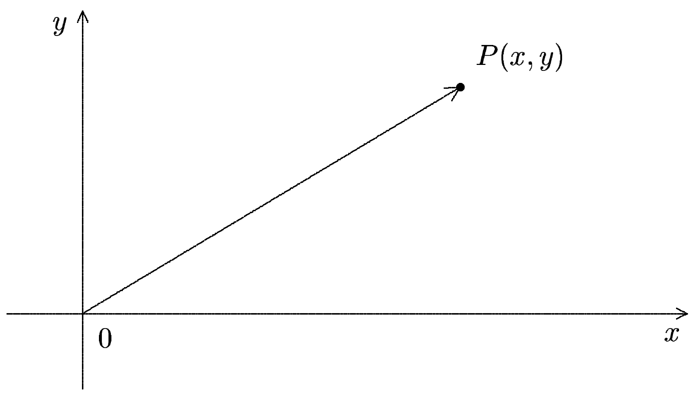

Abbildung 3.3 Zum Vektor-Begriff

- Kraft: wirkt mit einer bestimmten Stärke in einer Richtung
- Geschwindigkeit: hat Richtung und absolute Größe
- magnetische Feldstärke, elektrische Feldstärke, ...

Vektoren im Raum bzw. im $\mathbb{R}^n$ werden völlig analog definiert.

Vektoren kann man von Punkten *abtragen* (s. Abb. 3.4). Man verschiebt

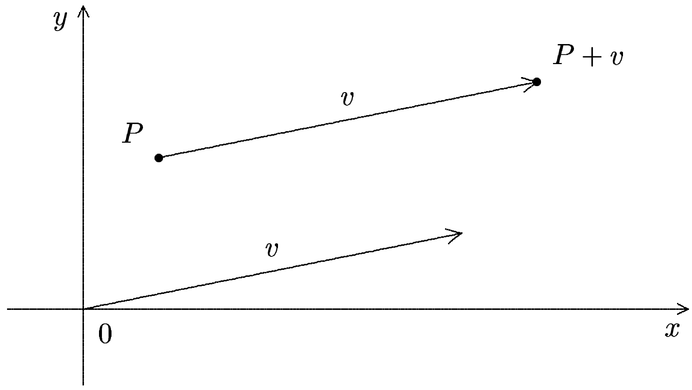

Abbildung 3.4 „Abtragen" von Vektoren

den Punkt um den Vektor. Umgekehrt haben zwei Punkte einen *Verbindungsvektor:*

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2), \quad \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Im Unterschied zu Vektoren nennt man Zahlengrößen oft auch *Skalare.* Skalare Größen in der Physik sind z.B. Masse, Zeit, Energie, Temperatur oder Spannung.

3.3 Rechnen mit Vektoren

Mit Vektoren kann man auch rechnen. Bevor wir das tun, legen wir aber noch folgende Bezeichnung fest: Punkte aus dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir kurz mit $x, y, \ldots, a, b, \ldots$. Hierbei ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$. $x_1, \ldots, x_n$ sind die *Koordinaten* von x. Fassen wir x als Vektor auf, so schreiben wir $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und entsprechend $\vec{y}, \ldots, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

Nun die Rechenregeln:

Negatives eines Vektors: Das *Negative* eines Vektors $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir mit $-\vec{x}$. Es wird definiert durch

$$-\vec{x} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

$-\vec{x}$ hat dieselbe Länge wie $\vec{x}$, jedoch die entgegengesetzte Richtung (s. Abb. 3.5).

Summe von zwei Vektoren: Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ist deren *Summe* bzw. *Differenz* definiert als:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ bzw. } \vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n).$$

Mehrere Kräfte, die in einem Punkt ansetzen, addieren sich nach dieser Regel. Geometrisch bedeutet diese Regel das „Parallelogramm der Kräfte“ (s. Abb. 3.6).

Bei der Addition von Vektoren gelten unter anderem die folgenden Regeln:

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \text{ und } (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

Skalare Multiplikation Für einen Skalar $a \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{x}$ ist die *skalare Multiplikation* definiert als

$$a\vec{x} = (ax_1, \ldots, ax_n).$$

Geometrisch bedeutet dies gerade eine Verlängerung bzw. Verkürzung um den Faktor a. Ist $a < 0$, so ist die Richtung von $a\vec{x}$ der von $\vec{x}$ entgegengesetzt. Für die skalare Multiplikation gelten unter anderem die Rechenregeln

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y} \quad \text{und} \quad a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}.$$

Die Gültigkeit dieser Regeln ist sofort aus der Definition ersichtlich.

Skalarprodukt Für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ ist das *innere Produkt* oder *Skalarprodukt* definiert. Achtung: Dies ist *kein* Vektor, sondern ein Skalar. Die Bezeichnung und Definition lautet

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \,,$$

falls $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Vektoren in der Ebene sind. Im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Für das Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x},$$

$$(a\vec{x})\vec{y} = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (a\vec{y}),$$

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z},$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}.$$

Diese Regeln ergeben sich unmittelbar aus der Definition. Es ist

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Die *Länge* oder *Norm* von $\vec{x}$ ist also

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Mittels des Skalarproduktes kann man leicht überprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ aufeinander *senkrecht* stehen, zueinander *orthogonal* sind. Ist dies der Fall, so schreibt man $\vec{x} \perp \vec{y}$.
Es gilt:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Da $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ganz leicht berechnet werden kann, bedeutet dies also, daß man Orthogonalität leicht überprüfen kann.

Begründung: Sind $\vec{x}, \vec{y}$ orthogonal, so ist das Dreieck mit den Eckpunkten $0, \vec{x}, (\vec{x}+\vec{y})$ rechtwinklig (s. Abb. 3.7). Es gilt also der Satz des PYTHAGORAS:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Nach den gerade erwähnten Rechenregeln ist aber

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{x} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{y} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}\,, \end{aligned}$$

also $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$: Es ist $(x, y) \perp (-y, x)$ (s. Abb. 3.8), und wirklich ist $(x, y) \cdot (-y, x) = -xy + yx = 0$!

Bemerkung: In der Mathematik *definiert* man Orthogonalität mittels des Skalarproduktes: $\vec{x} \perp \vec{y}$ gilt per Definition, falls $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Das innere Produkt wird in der Physik zur Definition (bzw. Berechnung) vieler fundamentaler Größen benutzt, z.B. bei der *Arbeit*:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} \qquad W = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Kraft und Weg sind vektorielle Größen, Arbeit ist eine skalare Größe.

Sind die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ nicht orthogonal, so gilt für ihr Skalar-Produkt der *Cosinus-Satz*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\varphi).$$

Dabei ist φ der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel.

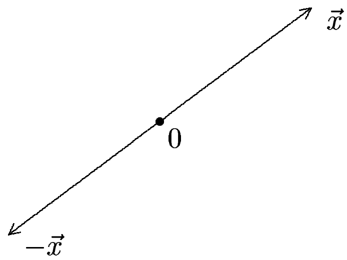

Abbildung 3.5 Negatives eines Vektors

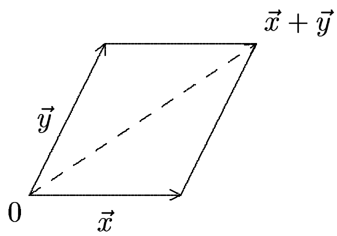

Abbildung 3.6 Addition von Vektoren

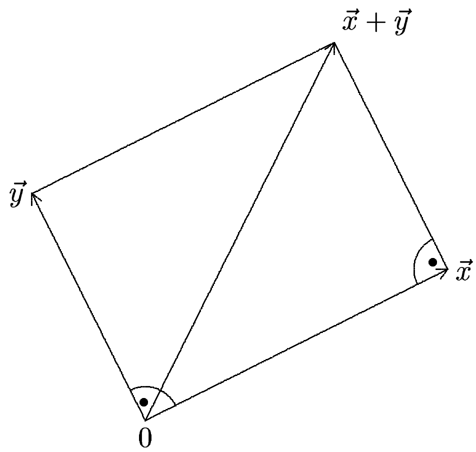

Abbildung 3.7 $\vec{x} \perp \vec{y}$

Der Cosinus-Satz ist völlig plausibel: Man zerlegt $\vec{y}$ in eine Komponente $\vec{u}$ in Richtung $\vec{x}$ und eine Komponente $\vec{v}$ senkrecht dazu (s. Abb. 3.9):

$$\vec{y} = \vec{u} + \vec{v}.$$

$\vec{u}$ hat die Richtung von $\vec{x}$ und die Länge $\|\vec{y}\| \cos \varphi$, also $\vec{u} = \frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|} \cos \varphi \cdot \vec{x}$. Daher ist

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{x} \cdot \vec{u} + 0 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi.$$

3.4 Das Vektor-Produkt

Im dreidimensionalen (nur im dreidimensionalen!) Raum gibt es ein weiteres Produkt, das zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ einen Vektor zuordnet. Dies ist das *Vektor-Produkt* (manchmal auch *äußeres Produkt* genannt), das folgendermaßen definiert ist:

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Wie man auf diese etwas merkwürdig erscheinende Definition kommt, werden wir später sagen. Für das Vektor-Produkt gelten folgende Rechenregeln:

1) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{y} = \vec{u} \times \vec{y} + \vec{v} \times \vec{y}$, $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

2) $\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}$

3) $(a\vec{x}) \times \vec{y} = a(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (a\vec{y}),\ a \in \mathbb{R}$

4) Haben $\vec{x}$ und $\vec{y}$ dieselbe Richtung, also $\vec{y} = a\vec{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$, so gilt $\vec{x} \times \vec{y} = 0$.

5) $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

6) Für die Länge von $\vec{x} \times \vec{y}$ gilt $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \varphi$. Dies ist der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms. φ ist der von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossene Winkel.

Die Regeln (1), (2), (3) ergeben sich unmittelbar durch Nachrechnen aus der Definition. Ebenso ist klar, daß $\vec{x} \times \vec{x} = 0$. Dann gilt nach (3) auch $\vec{x} \times (a\vec{x}) = 0$, womit (4) gezeigt ist. Um (5) zu beweisen, berechnen wir das innere Produkt $\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$. Nach Definition gilt

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = x_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2(-x_1 y_3 + x_3 y_1) + x_3(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Man sieht, daß sich hier alle Terme wegheben, also $\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = 0$, d.h. $\vec{x} \perp (\vec{x} \times \vec{y})$. Auf den Beweis von (6) verzichten wir.

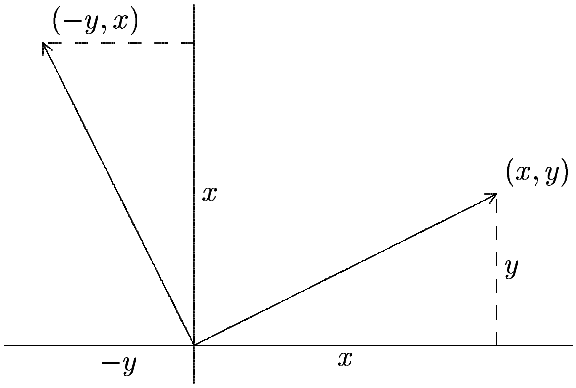

Abbildung 3.8 Orthogonalität im $\mathbb{R}^2$

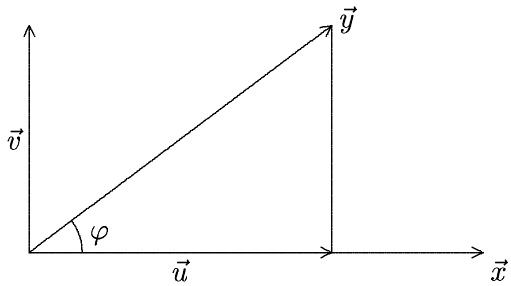

Abbildung 3.9 Begründung des Cosinus-Satzes

Zu der Definition des Vektorproduktes kommt man so: Versucht man im $\mathbb{R}^3$ ein Produkt zu definieren, das die (ziemlich natürlichen) Eigenschaften 1)-6) hat, so ist dieses Produkt zwangsläufig das angegebene.

Das Vektor-Produkt kommt an verschiedenen Stellen in der Physik vor, z.B. bei der Definition des Drehmomentes: Wirkt eine Kraft $\vec{K}$ auf einen Hebel $\vec{l}$, so wird das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{K}$$

bewirkt. Das Drehmoment ist eine vektorielle Größe, die in Newtonmeter Nm gemessen wird. (Beachte: Die Arbeit, die beim Durchlaufen einer durch einen Vektor $\vec{r}$ gegebenen Strecke gegen eine Kraft $\vec{K}$ verrichtet wird, ist eine skalare Größe, nämlich das innere Produkt $\langle \vec{r}, \vec{K} \rangle$, die ebenfalls in Newtonmeter Nm gemessen wird.)

Aufgabe: Welche der folgenden Größen sind skalare, welche vektorielle Größen: Geschwindigkeit, Zeit, Leistung, Flächeninhalt, Streckenlänge, Drehmoment, elektrische Feldstärke, Energie, elektrische Ladung, Beschleunigung?

4 Geraden in der Ebene

4.1 Grundbegriffe

Es ist eine elementare, aber für viele Anwendungen äußerst wichtige Aufgabe, Geraden in der Ebene - also im $\mathbb{R}^2$ - analytisch zu beschreiben. („Analytisch“ heißt dabei rechnerisch oder durch geeignete Gleichungen.) Mancher wird sich auch daran erinnern, daß die „Geraden-Gleichung“ die Form

$$y = ax + b \tag{4.1}$$

hat. Wir erläutern jetzt diese Gleichung und geben verschiedene Möglichkeiten an, Geraden zu beschreiben.

Wir gehen zunächst von der Gleichung (4.1) aus. Es sind dort a, b feste reelle Zahlen. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gehört dann ein eindeutig bestimmtes y, nämlich $y = ax+b$, und es geht um die Menge aller dieser Punkte (x, y). Wir betrachten also

$$g = \{(x, y)|x \in \mathbb{R},\ y = ax + b\} \ .$$

Wir wollen uns überlegen, daß diese Menge wirklich eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist. Dazu betrachten wir zunächst den Spezialfall $b = 0$. Wir haben dann $y = ax$, also

$$g = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\} \ .$$

Statt (x, ax) kann man auch $x(1, a)$ schreiben. g besteht also aus allen Vielfachen des Vektors $(1, a)$, d.h. g ist die Gerade, die durch $0 = (0, 0)$ und $(1, a)$ geht (vgl. Abb. 4.1).

Von besonderem Interesse ist der *Anstieg* oder die *Steigung* dieser Geraden. Per Definition ist das der Tangens des Neigungswinkels α der Geraden gegen die x-Achse. Es ist also (vgl. Abb. 4.1):

$$\text{Steigung von } g = \tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{a}{1} = a \ .$$

Die Gerade g mit der Gleichung $y = ax+b$ entsteht aus der Geraden g' mit der Gleichung $y = ax$ offenbar dadurch, daß zu jeder y-Koordinate die Konstante b addiert wird. Also entsteht g aus g' durch Verschiebung um b in Richtung der y-Achse, genauer durch Verschiebung um den Vektor $(0, b)$.

Ergebnis: Die Gleichung $y = ax + b$ beschreibt eine Gerade g, die die y-Achse im Punkt $(0, b)$ schneidet und den *Anstieg* a hat.

Geraden können in verschiedener Weise beschrieben und charakterisiert werden, z. B.

1) durch zwei beliebige verschiedene Punkte $P = (p, q)$, $Q = (u, v)$ auf der Geraden;

2) durch einen beliebigen Punkt $P = (p, q)$ auf der Geraden und die Richtung der Geraden;

3) durch einen beliebigen Punkt $P = (p, q)$ auf der Geraden und durch die Steigung a der Geraden.

Von allen drei Charakterisierungen kommt man schnell zur Geradengleichung (4.1). Wir beginnen mit der dritten: Der Anstieg a ist ja schon gegeben. Um den *Ordinaten-Abschnitt* b zu bestimmen, nutzt man aus, daß sich für $x = p$ der Wert $y = q$ ergeben muß, also

$$q = ap + b \text{ oder } b = q - ap\ .$$

Die Geraden-Gleichung ist also in diesem Fall

$$y = ax + (q - ap)\ . \tag{4.2}$$

Sind zwei Punkte P, Q wie in 1) gegeben, so kann man den Anstieg a mittels des „Steigungsdreiecks" ausrechnen. Aus diesem Dreieck (das wir im Prinzip schon bei der Abstandsberechnung in 3.1 benutzt haben) ergibt sich (vgl. Abb. 4.2)

$$a = \frac{v - q}{u - p}\ .$$

Weil g durch $P = (p, q)$ geht, ergibt sich nach Gleichung (4.2)

$$y = \frac{v - q}{u - p}x + \left(q - \frac{v - q}{u - p}p\right)\ .$$

Die Klammer (den Ausdruck für b) kann man etwas vereinfachen. Dann lautet die Gleichung einer Geraden durch die Punkte (p, q) und (u, v)

$$y = \frac{v - q}{u - p}x + \frac{qu - pv}{u - p}\ . \tag{4.3}$$

Bemerkung: Zu diesem Fall 1) ist noch ein kleiner Kommentar erforderlich. Es könnte sein, daß P und Q „senkrecht übereinander" liegen, also $p = u$. Dann ist unsere Gerade eine Parallele zur y-Achse. Dieser Fall wird nicht durch Gleichung (4.1) erfaßt. (Der Anstieg a ist gewissermaßen ∞.) Auch die Darstellung nach Gleichung (4.3) existiert nicht, denn dort taucht der Nenner $0 = u - p$ auf.

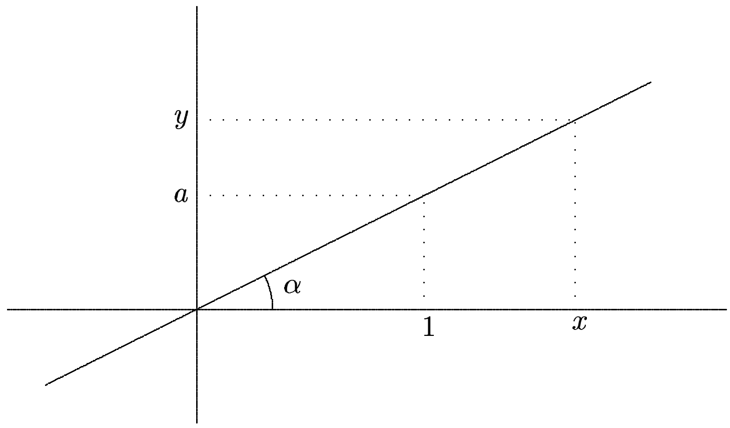

Abbildung 4.1 Die Gerade $y = ax$

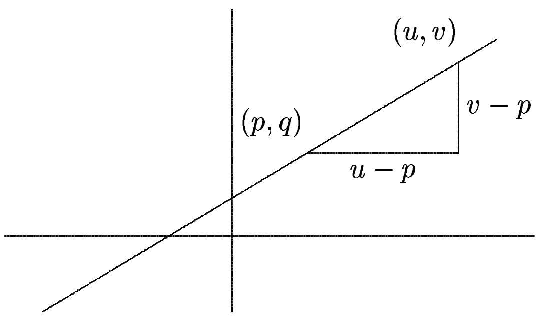

Abbildung 4.2 Gerade durch (p, q) und (u, v)

Im Fall 2) ist außer dem Punkt $P = (p, q)$ ein Richtungsvektor $(c, d) \neq (0, 0)$ gegeben, und g besteht aus allen Punkten

$$(p, q) + t(c, d)\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Ist $c = 0$, so erhält man wieder eine Parallele zur $y-$Achse. Andernfalls wird der Anstieg offenbar gegeben durch

$$a = \frac{d}{c}\,.$$

Die Gleichung einer Geraden durch $P = (p, q)$ mit Richtungsvektor (c, d), $c \neq 0$, ist damit gegeben durch

$$y = \frac{d}{c}x + \left(q - \frac{d}{c}p\right)\,.$$

Beispiele: Zahllose Naturvorgänge folgen einem „linearen Gesetz", das also durch eine Geradengleichung beschrieben wird. Zum Beispiel erhöht sich der systolische Blutdruck mit der Leistung, die der Körper erbringt (während der diastolische Blutdruck in etwa gleich bleibt oder leicht absinkt). Ähnlich besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Leistung (bzw. Sauerstoffaufnahme) und Pulsfrequenz (jedenfalls in einem bestimmten Bereich). Vgl. dazu die Diagramme in Abb. 4.3 und Abb. 4.4.

Aufgabe: Man bestimme für beide Beispiele die zugehörige Geradengleichung in der Form $y = ax + b$ (d.h. man bestimme jeweils die Parameter a und b). Wie würden Sie b im zweiten Beispiel nennen? Was beschreibt b?

4.2 Regressions-Gerade

Führt man einen Versuch wie im zweiten Beispiel konkret durch, d.h. misst man den Puls bei verschiedenen Belastungen, so liegen i.a. die Meßwerte natürlich nicht auf einer so schönen Geraden. Man erhält etwas, das aussehen könnte wie in Abb. 4.5.

Ein linearer Zusammenhang ist also erkennbar. Es geht jetzt darum, eine Gerade in der Ebene zu finden, die diese Punkte „möglichst gut" approximiert. Diese Gerade ist die sogenannte *Regressions-Gerade*. Sie wird wie folgt berechnet:
Gegeben sind n Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$:

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n).$$

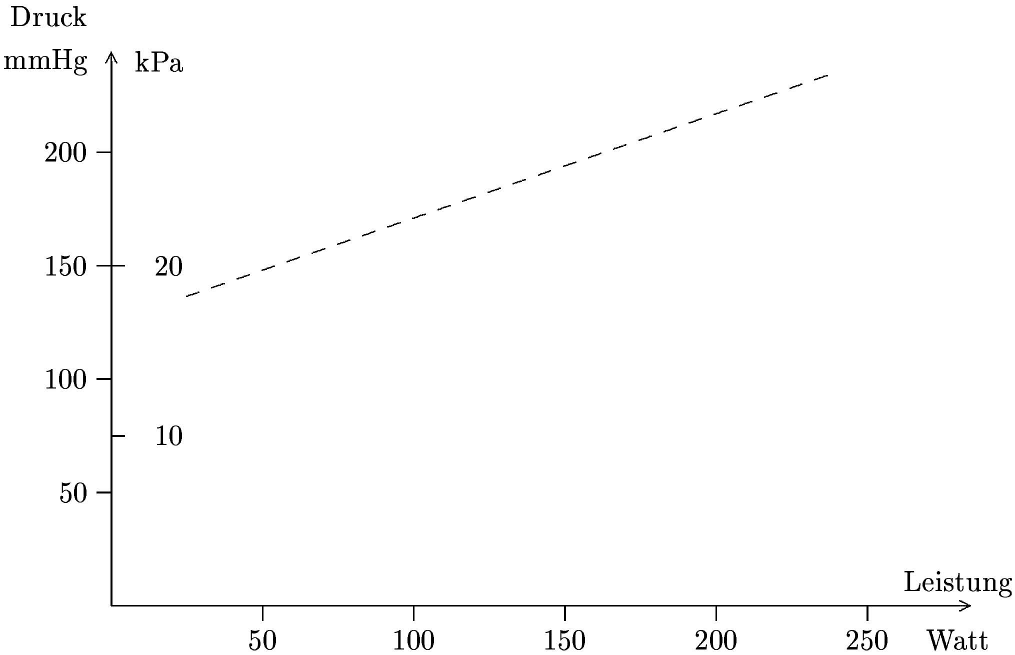

Abbildung 4.3 Systolischer Blutdruck in Abhängigkeit von Leistung

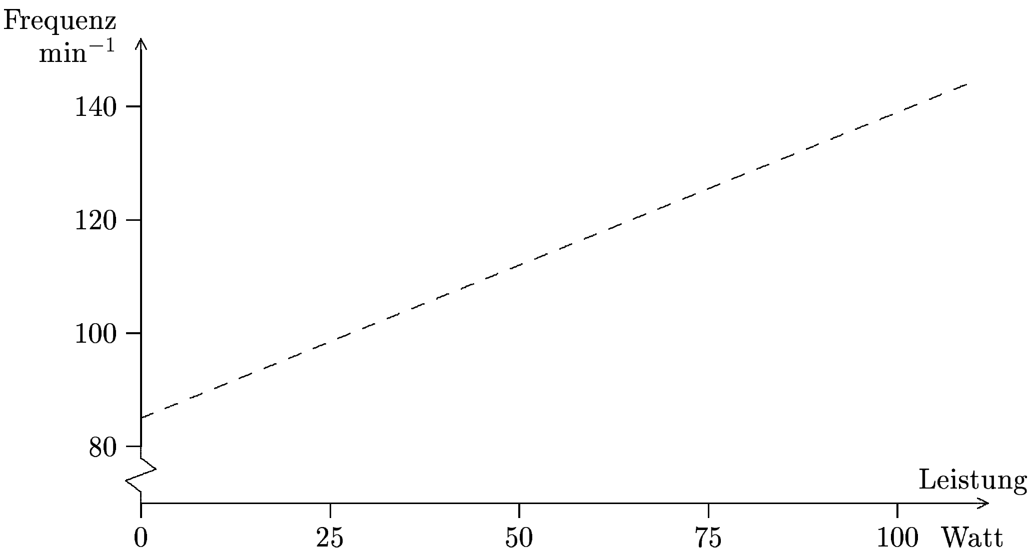

Abbildung 4.4 Pulsfrequnz in Abhängigkeit von Leistung am Ergometer (Versuchsperson: weiblich, 12 J)

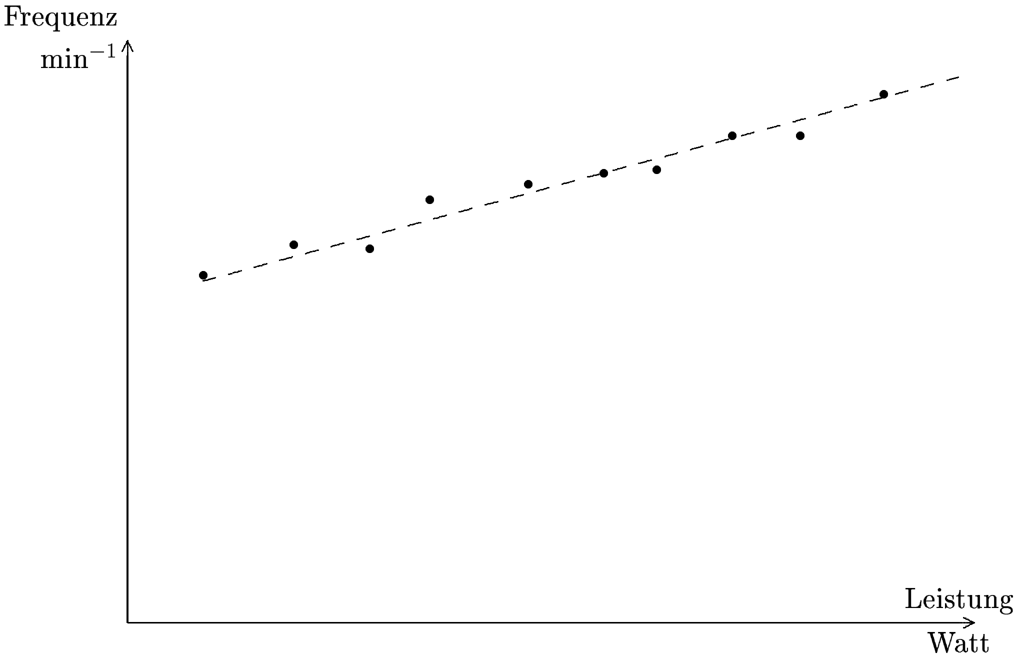

Abbildung 4.5 Realistische Meßdaten zu Abb. 4.4

Gesucht ist eine Gerade $y = ax + b$, die an den Stellen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ möglichst gut die Werte $v_1, v_2, \ldots, v_n$ annimmt. Eine solche Gerade geht durch den „Schwerpunkt“$(\bar{u}, \bar{v})$ der n Punkte

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \ , \ \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i$$

und hat den Anstieg

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\bar{u}^2}.$$

Mit diesen Formeln kann die gesuchte Gerade wie früher ausgeführt berechnet werden. Wie man zu diesen Formeln kommt, wird später erklärt. (Beachte, daß im Nenner von a ein Ausdruck steht, der auch bei der Berechnung der Streuung der u_i auftritt.)

Aufgabe: Gegeben sei die Gerade $y = ax + b$ mit (der Einfachheit halber) $a, b > 0$. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks, das begrenzt wird durch die Gerade, die x-Achse, y-Achse, Parallele zur y-Achse im Abstand x.