Übungen zur Mathematik für Naturwissenschaften **Weihnachtsblatt**
Prof. Dr. J. Lohkamp **WS 05/06**
Abgabe: In der Woche vom 9. bis 13. Januar 2006 in den jeweiligen Übungsgruppen

Aufgabe A: (4 Bonuspunkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen eine Stammfunktion (mit reellen Zahlen $a, b \neq 0$) :

$$f(x) = x^a + 2x^2 + x + 1, \qquad f(x) = a^{bx}, \qquad f(x) = x^3 \sin(x^4), \qquad f(x) = \frac{1}{2x+3}.$$

Aufgabe B: (4 Bonuspunkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$f(x,y) = (x+y)^4, \qquad f(x,y) = \cos(x^2y^3), \qquad f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Aufgabe C: (4 Bonuspunkte)

(i) Skizzieren Sie in einem 3-dimensionalen Schaubild den Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$. Skizzieren Sie für f in ein 2-dimensionales Schaubild drei verschiedene Höhenlinien sowie die Gradientenvektoren an sechs Punkten Ihrer Wahl.

(ii) Skizzieren Sie in einem 3-dimensionalen Schaubild den Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$. Skizzieren Sie für f in ein 2-dimensionales Schaubild drei verschiedene Höhenlinien sowie die Gradientenvektoren an sechs Punkten Ihrer Wahl.

Der Gradient einer Funktion $f(x,y)$ ist gegeben durch $\mathrm{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$. Zum Beispiel sei $f(x,y) = 3x^2 + xy$. Dann ist $\mathrm{grad} f(x,y) = (6x + y, x)$. Am Punkt $(1,2)$ hat f deshalb den Gradientenvektor $(6 \cdot 1 + 2, 1) = (8, 1)$.

Aufgabe D: (4 Bonuspunkte)
Geben Sie auf dem Intervall $[0,1]$ eine stetige Funktion f Ihrer Wahl an, die alle folgenden Bedingungen erfüllt:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 0, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}, \qquad 1 \geq f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0,1].$$