23. Oktober 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 1

1. Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \text{ wobei } 1 \leq p < \infty.$$

   Dabei ist
   $L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to [-\infty, \infty] \; messbar; \; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$ und
   $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty] \; messbar; \; f \in L^1(K), \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n\}$.

2. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion f heisst reell analytisch in y, falls eine Umgebung von y existiert, in der f als Taylor-Reihe geschrieben werden kann:

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x - y)^\alpha.$$

   Eine Funktion f heisst reell analytisch in Ω, falls f in jedem Punkt von Ω reell analytisch ist.

   Beweisen Sie:
   Sei Ω ein Gebiet und seien f und g reell analytische Funktionen in Ω.
   Existiert ein Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $D^\alpha f(x_0) = D^\alpha g(x_0)$ für alle α, dann ist $f = g$ in Ω.

3. Eine Funktion $u \in C^2(U)$ heisst sub-harmonisch, falls $\triangle u \geq 0$ für alle $x \in U$ gilt.
   Beweisen Sie:

   (a) Für eine sub-harmonische Funktion u gilt: $u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u \, dy$ für alle $B_r(x) \in U$

   (b) Es gilt: $max_U \; u = max_{\partial U} \; u$

   (c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und konvex. Sei u harmonisch und definiere $v := \phi(u)$. Dann ist v sub-harmonisch.

4. Sei N eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass eine C^∞-Funktion f existiert, deren Nullstellenmenge gerade N ist. Existiert auch ein harmonisches f?