15. Januar 2007

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 11

1. Sei $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie:

   (a) Für alle $u \in \mathcal{C}^\infty(0,1)$ gilt:

   $$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}}.$$

   (b) Für alle $u \in W^{1,p}(0,1)$ gilt:

   $$\|u\|_{L^\infty} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}}.$$

   Insbesondere sind $W^{1,p}(0,1)-$Funktionen fast überall beschränkt, das heißt $W^{1,p}(0,1) \subset L^\infty(0,1)$.

   Hinweis: Benutzen Sie für (b) ein Dichtheitsargument und L^p-Konvergenz.

2. *'Trace'-Abbildung*
   Sei U beschränkt und ∂U in $\mathcal{C}^1$. Zeigen Sie, dass es keinen beschränkten linearen Operator

   $$T : L^p(U) \to L^p(\partial U)$$

   gibt, so dass $Tu = u|_{\partial U}$ für alle $u \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap L^p(U)$.

3. Sei $n \geq 2$, $\Omega = B(0,1)$ der Einheitsball, $x_0 \in \Omega$ und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass $u \in C^1(\Omega \backslash x_0)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt, falls u und ∇u folgende Ungleichung erfüllen:

   $$\int_{\Omega \backslash x_0} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \ < \infty.$$

   Gilt die Aussage auch für $n = 1$?

4. Sei $u \in H^1(\mathbb{R})$ und u stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 < \infty$$