Partielle Differentialgleichungen I

Übung 12

1. Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit C^1 Rand. Zeigen Sie, dass die Einbettung
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \text{für} \;\; k < \frac{n}{p}, \;\; \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$
kompakt ist.

2. Sei U eine beschränkte, zusammenhängende und offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit einem C^1 Rand ∂U. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine konstante C, die nur von n, p, und U abhängt, so dass
$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}$$
für alle $u \in W^{1,p}(U)$ gilt und wobei $\bar{u} := \int_U u(x)dx$ das Mittel von u über U ist.

3. Falls f eine Lipschitzfunktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist f fast überall differenzierbar; dass heisst, $\text{grad} f(x) = (D_1 f(x), ..., D_n f(x))$ existiert und
$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \text{grad} f(x) \cdot (y - x)}{|y - x|} = 0$$
gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzfunktion. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine $C^1(\mathbb{R})$- Funktion g, so dass gilt:
$$\text{Lebesgues-Mass} \; (\{x; \; f(x) \neq g(x)\} \cup \{x; \; \text{grad} f(x) \neq \text{grad} g(x)\}) < \epsilon.$$

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 und folgendes Theorem:

   Whitney Erweiterung für C^1 Funktionen:

   Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $h : A \to \mathbb{R}$ und $\nu : A \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Falls
$$\lim_{x \to x_0; \; y \to x_0; \; x,y \in A; \; x \neq y} R(x, y) = 0, \quad \forall x_0 \in A,$$
   wobei
$$R(x, y) = \frac{h(y) - h(x) - \nu(x) \cdot (y - x)}{|x - y|}$$
   ist, dann existiert eine C^1 Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $g = h$ und grad $g{=}\nu$ auf A gilt.

   Ein Beweis dieses Theorems finden Sie in *Federer, Geometric Measure Theory.*