30. Oktober 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 2

1. Sei U^+ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n; \ \mid x \mid < 1, \ x_n > 0\}$. Sei u harmonisch in U^+ mit $u = 0$ auf $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$. Setze

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$$

für $x \in U = B_1(0)^\circ$, wobei $B_1(0)^\circ$ den offenen Einheitsball bezeichnet. Beweisen Sie, dass u harmonisch in U ist.

2. Sei U eine zusammenhängende offene Menge und (u_n) eine aufsteigende Folge (das heißt $u_0(x) \leq u_1(x) \leq ..., x \in U$) von harmonischen Funktionen in $C^2(U)$, so dass für einen Punkt $p \in U$ die Folge $u_n(p)$ konvergiert.
Beweisen Sie:
   (a) Für jedes $x \in U$ existiert $lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$.
   (b) Die Folge konvergiert gleichmässig auf jeder zusammenhängenden Menge $V \subset\subset U$ und u ist harmonisch.

3. Betrachten Sie das Dirichletproblem auf $U = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{auf } U \\ u \equiv g & \text{auf } \partial U, \end{cases}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } S^1 \\ 1 & \text{in } \{0\} \end{cases}$$

Existiert ein $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ das dieses Problem löst?

Tip: Leiten Sie die Rotationssymmetrie dieser Laplace-Gleichung her, um das Problem auf eine ODE zu reduzieren.

Alle Aufgaben werden mit jeweils 4 Punkten bewertet.
Auf diesem Übungsblatt wird Aufgabe 3 mit 8 Punkten bewertet.