6.November 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 3

1. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ definiert man den Heat Ball als

$$E(x,t;r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1};\ s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\},$$

wobei Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

   (a) Visualisieren Sie den Heat Ball und begründen sie seine Geometrie.

   (b) Zeigen Sie

$$\frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t;r)} \frac{(x-y)^2}{(t-s)^2}\ dyds \ = \ 1$$

2. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung für $n = 1$ und $u(x,t) = v(\frac{x^2}{t})$.

   (a) Zeigen Sie, dass $u_t = u_{xx}$ genau dann gilt, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z > 0).$$

   (b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der letzten Gleichung

$$v(z) = c\int_0^z e^{-\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds + d$$

   ist.

   (c) Differenzieren sie $v(\frac{x^2}{t})$ bezüglich x und wählen sie die Konstante c so, dass sie die Fundamentallösung Φ für $n = 1$ erhalten.

3. Beweisen Sie folgendes Lemma: (Neue Begriffe sind mit $^{(*)}$ gekennzeichnet und werden am Ende des Blattes erläutert)
Sei K ein kompakter metrischer Raum und $A \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ eine abgeschlossene $^{(*)}$*unitale Unteralgebra*. Dann gilt:

   (a) für $f \in A$ und $f \geq 0$ ist auch $\sqrt{f} \in A$

   (b) für $f \in A$ ist auch $|f| \in A$

   (c) A ist ein $^{(*)}$*Gitter*

4. Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 den folgenden Satz:
Sei K ein kompakter metrischer Raum und $A \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ eine $^{(*)}$*unitale Unteralgebra*, die in K $^{(*)}$*Punkte trennt*. Dann ist A dicht in $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Definitionen zu den Aufgaben 3 und 4:
Sei K ein kompakter metrischer Raum. Betrachtet man dann die Banach Algebra $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = sup_{t \in K} |f(t)|,$$

dann

(a) ist $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ eine *unitale Unteralgebra*, falls $1 \in A$ und falls für $f, g \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta f \in A$ und $fg \in A$.

(b) *trennt* $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ *Punkte in* K falls für alle $s, t \in K, s \neq t$ ein $f \in A$ existiert, für das $f(s) \neq f(t)$ gilt.

Zum Beispiel ist der Raum der Polynome von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ eine unitale Unteralgebra, die Punkte in $[a, b]$ trennt.
Ein *Gitter* ist eine Teilmenge $S \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, falls für alle $f, g \in S$ auch die Funktionen $max\{f(x), g(x)\}$ und $min\{f(x), g(x)\}$ in S liegen.