13.November 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 4

1. Wärmeleitung mit Spiegelung
   Sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ gegeben. Leiten Sie die Formel

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} g(s) ds$$

   als Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = g \text{ auf } \{x = 0\} \times [0, \infty) \end{cases}$$

   her.
   Hinweis: Sei $v(x,t) := u(x,t) - g(t)$ und erweitern Sie v auf $\{x < 0\}$ durch ungerade Spiegelung.

2. Eine Lösung der Wellengleichung für $n = 1$
   Zeigen Sie, dass für $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und $u = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$ (das heißt u erfüllt die d'Alembert-Formel) folgendes gilt:

   (a) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

   (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$

   (c) $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = h(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}, t > 0$.

3. Betrachte Sie die räumliche eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ für } 0 < x < \pi,\ t > 0$$

   mit Anfangsdaten

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx)$$

   und Randwerten

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

   Stellen Sie die Lösung als Fourierreihe $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \sin(nx)$ dar und berechnen Sie die Koeffizienten $\gamma_n(t)$.

4. Ein Beispiel für die inhomogene Wellengleichung
   Berechnen Sie $u = u(x,t)$ für $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t + x^2 \\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$