20. November 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 5

1. (Poisson's Formel für den Ball)
   Sei $g \in C(\partial B_r(0))$ und definiere u durch
   $$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \quad (x \in \partial B_r(0)^\circ).$$
   Zeigen Sie, dass dann gilt:
   (a) $u \in C^\infty(B_r(0)^\circ)$,
   (b) $\triangle u = 0$ in $B_r(0)^\circ$, und
   (c) $\lim_{x \to x_0, x \in B_r(0)^\circ} \quad u(x) \;=\; g(x_0)$ für jeden Punkt $x_0 \in B_r(0)^\circ$.

2. Benutzen Sie Posson's Formel für den Ball um folgende Ungleichungen zu beweisen:
   $$r^{n-2}\frac{r - |x|}{(r+|x|)^{n-1}}\, u(0) \le u(x) \le \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}\, u(0)$$
   falls u positiv und harmonisch in $B_r(0)^\circ$ ist. Das ist eine explizite Form der Harnack Ungleichung.

3. Sei u eine glatte Funktion, die $u_t - \triangle u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ löst.
   Zeigen Sie, dass $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung löst.

4. Betrachten Sie die Wellengleichung $u_{xx} = u_{tt}$ im Bereich
   $$\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 |\ t > 0,\ x > \alpha t\},$$
   wobei $\alpha \in (-1,1)$ eine Konstante ist. Seien dazu folgende Randbedingungen gegeben
   $$\begin{cases} u(\alpha t, t) = 0, & t > 0 \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x > 0 \end{cases}$$
   Finden Sie die Lösung u.