27. November 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 6

1. (a) Lösen Sie die folgende PDE mit Hilfe der Methode der Charakteristiken:

$$\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x) \\ u(0,x) = \frac{2}{3}\sin(x) \end{cases} \tag{*}$$

für $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

(b) Bestimmen Sie alternativ die Lösung der PDE $(*)$ mit Hilfe der Formel für die inhomogene Transportgleichung.

2. *Verallgemeinerung von Aufgabe 1*

(a) Schreiben Sie die Charakteristischen Gleichungen der PDE

$$u_t + b \cdot Du = f \quad \text{im } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \tag{**}$$

auf, wobei $b \in R^n$ und $f = f(x,t)$ ist.

(b) Benutzen Sie die charakteristischen ODE's um $(**)$ mit der Anfangsbedingung

$$u = g \quad auf \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

zu lösen.
Hinweis: Die allgemeine Lösung u entspricht der Formel, die in der Vorlesung für die inhomogene Transportgleichung hergeleitet wurde.

3. Lösen Sie folgende Gleichungen mit Hilfe der Methode der Charakteristiken:

(a) $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u$, $u(x_1, 1) = g(x_1)$

(b) $u u_{x_1} + u_{x_2} = 1$, $u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1$

(c) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} = 3u$, $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$

4. Betrachten Sie folgende quasilineare PDE erster Ordnung:

$$\begin{cases} G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + u \cdot Du = 0 \quad \text{in } U = \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g \quad \text{auf } \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

(a) Prüfen Sie, ob die "nicht-charakterisitsche Bedingung" erfüllt ist.

(b) Stellen Sie die charakteristischen Gleichungen $\dot{x}, \dot{z}$ und $\dot{p}$ auf.

(c) Berechnen Sie die Charakteristiken.