4. Dezember 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 7

1. Betrachten Sie die Jacobi-Hamilton Gleichung:

$$\begin{cases} u_t + H(Du) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

   und sei L die Lagrange-Funktion zu H. Beweisen Sie damit folgenden Satz:
   Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ sei

$$u(x,t) := \inf\{\int_0^t L(w'(s))ds + g(y) : w(0) = y, w(t) = x\}, \qquad (*)$$

   wobei das Infimum betrachtet wird über allen $\mathcal{C}^1-$Funktionen w mit $w(t) = x$.
   Dann ist die Lösung u von $(*)$ gleich

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}. \qquad (**)$$

   Die rechte Seite dieses Ausdrucks nennt man *Hopf-Lax-Formel*.
   Hinweis: Beweisen Sie obige Gleichheit erst für das Infimum in der Hopf-Lax-Formel und zeigen Sie dann, dass dieses angenommen wird, also ein Minimum ist. Dabei wird unter anderem die *Jensen-Ungleichung* benutzt, welche zum Beispiel im Evans nachgelesen werden kann.

2. *Die Hopf-Lax-Formel löst die Hamilton-Jacobi-Gleichung:*
   Sei $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ und sei u durch die Hopf-Lax-Formel $(**)$ defininiert. Ist u in $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ differenzierbar, dann gilt:

$$u_t(x,t) + H(Du(x,t)) = 0.$$

   Bemerkung: Da u Lipschitz stetig ist, ist u nach dem Theorem von Rademacher fast überall differenzierbar und somit löst die Hopf-Lax-Formel die Hamilton-Jacobi-Gleichungen fast überall.

3. Zeigen Sie, dass für die Hopf-Lax Formel folgende Gleichheit gilt:

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\} = \min_{y \in B(x,Rt)} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}$$

   für $R = \sup_{\mathbb{R}^n} |DH(Dg)|$, wobei $H = L^*$, das heißt, H ist die Legendre-Transformierte von L.
   Hinweis: Benutzen Sie folgende Aussagen ohne Beweis.
   Sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. q gehört zum **Subdifferential von H an p** (d.h. $q \in \partial H(p)$), falls

$$H(r) \geq H(p) + q \cdot (r - p)$$

   für alle $r \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$q \in \partial H(p) \Leftrightarrow p \in \partial L(q) \Leftrightarrow p \cdot q = H(p) + L(q),$$

wobei $L = H^*$ ist.

4. Sei E eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

   Falls die Hopf-Lax Formel auf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + |Du|^2 & auf\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = \begin{cases} 0 & x \in E \\ +\infty & sonst \end{cases} & auf\ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

   angewendet werden kann, dann liefert sie die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{4t} dist(x,E)^2.$$