11. Dezember 2006

# Partielle Differentialgleichungen I

Übung 8

1. Betrachten Sie die Burgers Gleichung

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(x,0) = g(x)$$

mit $g \in C^2$. Nehmen Sie an, dass $g'(x) \geq 0$ und $g'$ besitzt kompakten Träger.

   (a) Beweisen Sie, dass die Gleichung eine globale $C^2$-Lösung für alle nicht-negativen Zeiten hat, $t \in [0, \infty)$.

   (b) Beweisen Sie, dass $u_x(x,t) \geq 0$ und $u_x(\cdot, t)$ besitzt kompakten Träger für alle $t \geq 0$

   (c) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(t) := \int_{\mathbb{R}} \left(u_x(x,t)\right)^2 \, dx, \quad t \geq 0,$$

   fallend ist.

   Hinweis: Methode der Charakteristiken, Satz über implizite Funktionen

2. Sei $F(0) = 0$ und sei $u$ eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

   mit kompaktem Träger.
   Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\cdot, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g dx.$$

3. Berechnen Sie die eindeutige Entropie-Lösung von

$$\begin{cases} u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

   für

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x < -1 \\ 0 \text{ für } -1 < x < 0 \\ 2 \text{ für } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ für } x > 1. \end{cases}$$

4. Betrachten Sie folgende Modifikation der Burgers-Gleichung:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{für } x, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung eine Lösung der Form

$$u(x,t) = v(x - \sigma t)$$

besitzt, wobei $v$ eine Funktion ist, die bei Unendlich genügend schnell abfällt.
Berechnen Sie diese Funktion auch explizit.
Hinweis: Eine ODE der Form $v'' = f(v)$ kann nach Multiplikation beider Seiten mit $v'$ integriert werden.
Bemerkung: Diese PDE ist bekannt als die *Korteweg de Vries Gleichung* und eine Lösung in der obigen Form heißt *Soliton*.