18. Dezember 2006

Partielle Differentialgleichungen I

Übung 9

Cauchy-Kovalevskaya

1. Sei $h : (-a,a)^n \to \mathbb{R}^n$ eine in der Nähe von $0 \in (-a,a)^n$ reell analytische Funktion. Dann gilt:
$$h \ll \frac{Cr}{r - z_1 - \cdots - z_n},$$
für Konstanten C und r, in einer genügend kleinen Umgebung der 0.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Majorantenmethode (method of majorants) folgende elementare Version des Cauchy-Kovalevskaya Theorems:

   Sei $a > 0$ und $f : (-a,a)^n \to \mathbb{R}^n$ eine in der Nähe von $0 \in (-a,a)^n$ reell analytische Funktion und sei $u(t)$ die eindeutige Lösung der Gewöhnlichen Differentialgleichung
$$u'(t) = f(u(t)) \quad \text{mit} \quad u(0) = 0.$$
Dann ist u in der Nähe von 0 auch reel analytisch .

3. Lösen Sie folgende lineare PDE:
$$u_x = u_y \quad \text{mit} \quad u(x,0) = f(x),$$
wobei $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ eine, in der Nähe von $x = 0$, reell analytische Funktion mit Konvergenzradius ρ ist.

4. Sei $u(x_1, x_2)$ die Lösung der Laplace-Gleichung $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$, wobei $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ ist. Betrachten Sie das Anfangswertproblem auf dem Einheitskreis mit
$$u = f(\theta), \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \quad r = 1,$$
wobei f, g reell analytische und periodische Funktion sind mit Periode 2π für alle θ.

   Zeigen Sie, dass eine reell analytische Funktion u existiert, für $\theta \in \mathbb{R}$ und $|r-1|$ genügend klein.

5. Bonusaufgabe
Zeigen Sie, dass die Gerade $\{t = 0\}$ für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ charakteristisch ist. Zeigen Sie weiter, dass keine analytische Lösung u der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $u = \frac{1}{1+x^2}$ auf $\{t = 0\}$, existiert.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine analytische Lösung existiert, und zeigen Sie dann, dass die Potenzreihe, ausser in $(0,0)$, divergiert.