Multiplikative Strukturen in $K^*(X,Y)$ (Teil II)

Ein Vortrag im Rahmen des Seminars zur K-Theorie am 14.07.2011

Christian Bönicke

1 Wiederholung

Für $n \geq 1$ definiert $C_n(X,A)$ eine Kategorie wie folgt: Ein Objekt aus $C_n(X,A)$ ist ein Tupel $E_n, E_{n-1}, \ldots, E_0$ von Vektorbündeln über X zusammen mit Morphismen $\alpha_i : E_i|A \to E_{i-1}|A$, so dass die Folge

$$0 \longrightarrow E_n|A \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1}|A \cdots \xrightarrow{\alpha_1} E_0|A \longrightarrow 0$$

exakt ist. Die Morphismen $\phi : E \to F$ mit $E = (E_i, \alpha_i)$, $F = (F_i, \beta_i)$ sind Familien von Abbildungen $\phi_i : E_i \to F_i$, so dass $\beta_i \phi_i = \phi_{i-1}\alpha_i$.
Eine Elementarsequenz in $C_n(X,A)$ ist eine Sequenz der Form $0, 0, \ldots, 0, E_p, E_{p-1}, 0, \ldots, 0$ mit $E_p = E_{p-1}$ und $\alpha = id$. Wir definieren $E \sim F$ falls Elementarsequenzen $Q_1, \ldots, Q_l, P_1, \ldots, P_k$ existieren mit

$$E \oplus Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_l \cong F \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_k.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_n(X,A)$. Wir haben eine natürliche Inklusion $C_n(X,A) \hookrightarrow C_{n+1}(X,A)$, die einen Homomorphismus $\mathcal{L}_n(X,A) \to \mathcal{L}_{n+1}(X,A)$ induziert.

2 Fortsetzung

Unser Ziel war es den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2.1. *Für alle $n \geq 1$ ist die Abbildung $\mathcal{L}_n(X,A) \to \mathcal{L}_{n+1}(X,A)$ ein Isomorphismus und es gilt $\mathcal{L}_n(X,A) \cong K(X,A)$.*

Wir haben dazu eine natürliche Transformation von Funktoren $\chi_n : \mathcal{L}_n(X,A) \longrightarrow K(X,A)$, eine Euler-Charakteristik, eingeführt. Im vorherigen Vortrag haben wir auch bereits gesehen, dass eine eindeutig bestimmte Euler-Charakteristik χ_1 existiert, und gezeigt, dass sie ein Isomorphismus ist.

Korollar 2.2. *Die Klasse von $(E_1, E_0; \alpha)$ in $\mathcal{L}_1(X,A)$ hängt nur von der Homotopieklasse von α ab.*

Beweis. Sei $\pi : X \times [0,1] \to X$ die Projektion und α_t eine Homotopie von Isomorphismen $\alpha_t : E_1|A \to E_0|A$ mit $\alpha_0 = \alpha$. Dann haben wir einen Isomorphismus $\beta : \pi^*(E_1)|A \times [0,1] \to \pi^*(E_0)|A \times [0,1]$ gegeben durch $\beta(x,t,e) = (x,t,\alpha_t(e))$. Also ist $(\pi^*(E_1), \pi^*(E_0); \beta) \in \mathcal{L}_1(X \times [0,1], A \times [0,1])$. Definiere weiterhin für alle $t \in [0,1]$ eine Abbildung $i_t : (X,A) \to (X \times [0,1], A \times [0,1])$ durch $x \mapsto (x,t)$. Dann haben wir (dank der Natürlichkeit von χ_1) ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1(X,A) \arrow[d, "\chi_1"'] & \mathcal{L}_1(X \times [0,1], A \times [0,1]) \arrow[l, "i_0^*"'] \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "\chi_1"'] & \mathcal{L}_1(X,A) \arrow[d, "\chi_1"'] \\
K(X,A) & K(X \times [0,1], A \times [0,1]) \arrow[l, "i_0^*"'] \arrow[r, "i_1^*"] & K(X,A)
\end{tikzcd}$$

Alle Abbildungen in diesem Diagramm sind Isomorphismen, da i_0 bzw. i_1 Homotopieäquivalenzen sind ($i_0\pi \simeq id$) und es gilt: $i_0^*(i_1^*)^{-1} = id_{K(X,A)}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\chi_1([(E_1, E_0, \alpha_0)]) &= \chi_1(i_0^*([(\pi^*(E_1), \pi^*(E_0), \beta]) \\
&= \chi_1(i_1^*([(\pi^*(E_1), \pi^*(E_0), \beta]) \\
&= \chi_1([(E_1, E_0, \alpha_1)])
\end{aligned}$$

Also folgt $[(E_1, E_0, \alpha_0)] = [(E_1, E_0, \alpha_1)]$. □

Lemma 2.3. *Der Homomorphismus $\mathcal{L}_n(X,A) \to \mathcal{L}_{n+1}(X,A)$ ist surjektiv.*

Beweis. Sei $E = (E_{n+1}, \dots, E_0; \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_1)$ ein Repräsentant eines Elements aus $\mathcal{L}_{n+1}(X,A)$. Dann ist auch
$(E_{n+1}, E_n \oplus E_{n+1}, E_{n-1} \oplus E_{n+1}, E_{n-2}, \dots, E_0; \alpha_{n+1} \oplus 0, \alpha_n \oplus 1, \dots, \alpha_1)$ Repräsentant eines Elements aus $\mathcal{L}_{n+1}(X,A)$. Außerdem sind die Monomorphismen $\alpha_{n+1} \oplus 0 : E_{n+1}|A \to E_n|A \oplus E_{n+1}|A$ und $0 \oplus 1 : E_{n+1}|A \to E_n|A \oplus E_{n+1}|A$ homotop via der Homotopie $H : E_{n+1}|A \times [0,1] \to E_n|A \oplus E_{n+1}|A$, $H(e,t) = t(\alpha_{n+1} \oplus 0)(e) + (1-t)(0 \oplus 1)(e)$. Die Abbildung $0 \oplus 1$ lässt sich aber offenbar auf ganz X erweitern, also folgt mit Lemma 2.63, dass sich auch $\alpha_{n+1} \oplus 0$ zu einem Monomorphismus $\beta : E_{n+1} \to E_n \oplus E_{n+1}$ über ganz X erweitern lässt. Da β ein Monomorphismus ist, ist $\beta(E_{n+1})$ ein Vektorbündel, also haben wir insbesondere $E_n \oplus E_{n+1} \cong \beta(E_{n+1}) \oplus Q$ für ein Vektorbündel $Q = \beta(E_{n+1})^\perp$ über X. Dann induziert der Vektorbündelmorphismus $\alpha_n \oplus id : E_n \oplus E_{n+1} \to E_{n-1} \oplus E_{n+1}$ einen Vektorbündelmorphismus $\gamma : Q \hookrightarrow E_n \oplus E_{n+1} \xrightarrow{\alpha_n \oplus id} E_{n-1} \oplus E_{n+1}$. Weiterhin ist γ über A injektiv, denn ist $a \in A$ und $(q_1, q_2) \in Q_a \hookrightarrow (E_n \oplus E_{n+1})_a$ mit $\gamma(q_1, q_2) = (\alpha_n(q_1), q_2) = 0$ so folgt natürlich sofort $\alpha_n(q_1) = 0 = q_2$ Insbesondere gilt per Definition aber $q_1 \in im(\alpha_{n+1})^\perp = ker(\alpha_n)^\perp$ Also folgt $q_1 \in ker(\alpha_n)^\perp \cap ker(\alpha_n) = \{0\}$ und damit $q_1 = 0 = q_2$. Damit ist $E' := (0, Q, E_{n-1} \oplus E_{n+1}, E_{n-2}, \dots, E_0; 0, \gamma, \alpha_{n-1} \oplus 0, \dots, \alpha_1) \in C_{n+1}(X,A)$. Weiterhin ist E äquivalent zu E'. Definiere dazu Sequenzen

$$P = 0 \longrightarrow \beta(E_{n+1}) \longrightarrow \beta(E_{n+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$
$$R = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Dann gilt: $E \oplus R \cong E' \oplus P$. Betrachte dazu das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \beta(E_{n+1}) \arrow[r, "0\oplus id"] \arrow[d, "\beta^{-1}"'] & Q \oplus \beta(E_{n+1}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi"'] & E_{n-1} \oplus E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "id\oplus id"'] & E_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}\oplus 0"] & E_n \oplus E_{n+1} \arrow[r, "\alpha_n\oplus id"] & E_{n-1} \oplus E_{n+1} \arrow[r] & E_{n-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Das linke Quadrat kommutiert über A, da β über A gerade $\alpha_{n+1} \oplus 0$ entspricht. Also gilt für $\beta(x_{n+1}) \in \beta(E_{n+1})|A$:
$\phi(0, \beta(x_{n+1})) = \beta(x_{n+1}) = (\alpha_{n+1} \oplus 0)(x_{n+1}) = (\alpha_{n+1} \oplus 0)(\beta^{-1}(\beta(x_{n+1})))$.
Für die Kommutativität des rechten Teils sei $q = (q_1, q_2) \in Q \hookrightarrow E_n \oplus E_{n+1}$ und $x \in E_{n+1}$. Dann gilt: $\phi(q, \beta(x)) = q + \beta(x) = (q_1 + \alpha_{n+1}(x), q_2)$ und damit $(\alpha_n \oplus id)(\phi(q, \beta(x)) = (\alpha_n(q_1), q_2) = \gamma(q_1, q_2)$. Das die Abbildungen von der ersten zur zweiten Zeile Isomorphismen sind ist klar. $\square$

Lemma 2.4. *Der Homomorphismus $\mathcal{L}_n(X, A) \to \mathcal{L}_{n+1}(X, A)$ ist für alle $n \geq 1$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Es genügt eine Abbildung $\phi : \mathcal{L}_n(X, A) \to \mathcal{L}_1(X, A)$ zu konstruieren, welche linksinvers zur Abbildung $\psi : \mathcal{L}_1(X, A) \to \mathcal{L}_n(X, A)$ ist. Dann kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1(X,A) \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
\mathcal{L}_n(X,A) \arrow[r] & \mathcal{L}_{n+1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

Also folgt die Behauptung.
Sei also $(E_n, \ldots, E_0; \alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ Repräsentant eines Elements in $\mathcal{L}_n(X, A)$. Wähle nun auf jedem E_i eine hermitesche Metrik und bezeichne mit $\alpha_i' : E_{i-1}|A \to E_i|A$ die zu α_i adjungierte Abbildung. Setze $F_0 = \bigoplus_{0\leq i\leq n \text{ gerade}} E_i$ und $F_1 = \bigoplus_{0\leq i\leq n \text{ ungerade}} E_i$ und definiere $\beta : F_1 \to F_0$ durch

$$\beta(x_1, x_3, x_5, \ldots) = (\alpha_1(x_1), \alpha_3(x_3) + \alpha_2'(x_1), \alpha_5(x_5) + \alpha_4'(x_3), \ldots).$$

Zeige: β ist ein Isomorphismus über A. Dann repräsentiert (F_1, F_0, β) ein Element aus $\mathcal{L}_1(X, A)$. Es genügt zu zeigen, dass β auf jeder Faser ein Vektorraumisomorphismus ist. Sei also $a \in A$. Dann gilt wegen der Exaktheit und mithilfe der Linearen Algebra: $im(\alpha_i)_a \oplus im(\alpha_{i-1}')_a = ker(\alpha_{i-1})_a \oplus im(\alpha_{i-1}')_a = E_{{i-1}_a}$. Daraus folgt die Surjektivität.
Zur Injektivität: Für alle i ungerade mit $\alpha_i(x_i) + \alpha_{i-1}'(x_{i-2}) = 0$, also $\alpha_i(x_i) = -\alpha_{i-1}'(x_{i-2})$ gilt $\alpha_{i-1}'(x_{i-2}) \in im(\alpha_i) = ker(\alpha_{i-1}) = im(\alpha_{i-1}')^{\perp}$.

Also $\alpha'_{i-1}(x_{i-2}) \in im(\alpha'_{i-1}) \cap im(\alpha'_{i-1})^{\perp} = \{0\}$. Insbesondere folgt also, dass $\alpha_i(x_i) = 0 = \alpha'_{i-1}(x_{i-2})$. Das heißt für alle i ungerade gilt $\alpha_i(x_i) = 0 = \alpha'_{i+1}(x_i)$ und damit $x_i \in ker(\alpha_i) = im(\alpha_{i+1}) = ker(\alpha'_{i+1})^{\perp}$. Also folgt $x_i \in ker(\alpha'_{i+1})^{\cap} ker(\alpha'_{i+1})^{\perp} = \{0\}$. Diese Konstruktion gibt uns eine Abbildung $\phi : \mathcal{L}_n(X, A) \to \mathcal{L}_1(X, A)$. Um zu sehen, dass ϕ wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass (F_1, F_0, β) nicht von der Wahl der Metriken auf den E_i abhängt. Dazu beobachte, dass alle Metriken auf E homotop sind: Sind $s, s' : X \to Herm(E)$ zwei Metriken auf E, so ist eine Homotopie $H_t : X \to Herm(E)$ gegeben durch $H_t(x) = ts'(x) + (1-t)s(x)$. Dabei ist $H_t(x)$ positiv definit für alle $t \in I$, denn $H_t(x)(v, v) = ts'(x)(v, v) + (1-t)s(x)(v, v) = 0$ genau dann wenn $s'(x)(v, v) = 0$ oder $s(x)(v, v) = 0$ und damit folgt $v = 0$, da s, s' positiv definit sind. Also ändert eine andere Wahl von Metriken die Homotopieklasse von β nicht. Nach Korollar 2.2 hängt die Klasse von (F_1, F_0, β) in $\mathcal{L}_1(X, A)$ aber nur von der Homotopieklasse von β ab. Bleibt zu zeigen, dass $\phi\psi = id_{\mathcal{L}_1(X,A)}$. Aber das ist klar, denn ist $[(E_1, E_0, \alpha)] \in \mathcal{L}_1(X, A)$, so gilt: $\phi(\psi([(E_1, E_0, \alpha)]) = \phi([(0, \ldots, 0, E_1, E_0, \alpha)] = [(E_1, E_0, \alpha)]$. □

Korollar 2.5. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Euler-Charakteristik $\chi_n : \mathcal{L}_n(X, A) \to K(X, A)$ und sie ist immer ein Isomorphismus. Also existiert ein Isomorphismus $\chi : \mathcal{L}_\infty(X, A) \to K(X, A)$.*

Beweis. Wir definieren χ_n als die Verknüpfung

$$\mathcal{L}_n(X, A) \overset{\cong}{\to} \mathcal{L}_1(X, A) \overset{\chi_1}{\to} K(X, A)$$

Dann gilt für $A = \emptyset$:

$$\begin{aligned} \chi_n(E_n, \ldots, E_0) &= \chi_1(\bigoplus_{2i+1} E_i, \bigoplus_{2i} E_i) \\ &= [\bigoplus_{2i} E_i] - [\bigoplus_{2i+1} E_i] \\ &= \sum_i (-1)^i [E_i] \end{aligned}$$

Die Existenz des Isomorphismus χ folgt direkt aus der universellen Eigenschaft von *colim*. □

3 Paare

Als nächstes wollen wir Paarungen

$$\mathcal{L}_n(X,Y) \otimes \mathcal{L}_m(X',Y') \to \mathcal{L}_{n+m}((X,Y) \times (X',Y'))$$

konstruieren, die verträglich sind mit den Paarungen

$$K(X,Y) \otimes K(X',Y') \to K((X,Y) \times (X',Y'))$$

Dafür benötigen wir den folgenden Begriff:

Definition 3.1. Ein Komplex von Vektorbündeln über X ist eine Folge von Vektorbündeln über X

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\sigma_n} E_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\sigma_1} E_0 \longrightarrow 0$$

für die gilt: $\sigma_i \sigma_{i+1} = 0$ für alle $1 \leq i < n$.

Bemerkung 3.2. Einige nützliche Konstruktionen für Vektorbündel lassen sich Problemlos auf Komplexe übertragen:

- Ist E ein Komplex über X und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist $f^*(E)$ ein Komplex über Y. Dabei ist $f^*(E)$ der Komplex

  $$0 \to f^*(E_n) \to f^*(E_{n-1}) \to \cdots \to f^*(E_0) \to 0$$

  und die Abbildungen $\alpha_i^* : f^*(E_i) \to f^*(E_{i-1})$ sind gegeben durch $(y,e) \mapsto (y, \alpha_i(e))$. Dann gilt offenbar $\alpha_i^*(\alpha_{i+1}^*(y,e)) = (y, \alpha_i(\alpha_{i+1}(e))) = (y, 0)$.

- Ist $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = X_1 \cap X_2$ abgeschlossen und E, F Komplexe über X_1 bzw. X_2, so dass $E|Y \overset{\varphi}{\cong} F|Y$, so ist

  $$0 \to E_n \cup_\varphi F_n \to E_{n-1} \cup_\varphi F_{n-1} \to \cdots \to E_0 \cup_\varphi F_0 \to 0$$

  ein Komplex über X. Wir notieren ihn wieder mit $E \cup_\varphi F$. Dabei sind die Abbildungen $\alpha_i \cup_\varphi \beta_i : E_i \cup_\varphi F_i \to E_{i-1} \cup_\varphi F_{i-1}$ gegeben durch $\alpha_i \cup_\varphi \beta_i([e]) = \begin{cases} [\alpha_i(e)], & e \in E_i \\ [\beta_i(e)], & e \in F_i \end{cases}$

Lemma 3.3. *Seien $E_0, \dots, E_n$ Vektorbündel über X und seinen $\sigma_i : E_i|Y \to E_{i-1}|Y$ Morphismen von Vektorbündeln, so dass*

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\sigma_n} E_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\sigma_1} E_0 \longrightarrow 0$$

exakt über Y ist. Dann existieren Morphismen von Vektorbündeln $\rho_i : E_i \to E_{i-1}$ mit $\rho_i|Y = \sigma_i$ und $\rho_i \rho_{i+1} = 0$ für alle $1 \leq i < n$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass eine offene Umgebung U von Y und Erweiterungen τ_i von σ_i auf U existieren, so dass für

$$0 \longrightarrow E_n|U \xrightarrow{\tau_n} E_{n-1}|U \xrightarrow{\tau_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tau_1} E_0|U \longrightarrow 0$$

gilt: $\tau_i\tau_{i+1} = 0$. Dann können wir mithilfe des Lemmas von Urysohn eine stetige Abbildung $\rho : X \to [0,1]$ wählen mit $\rho \equiv 1$ auf Y und $supp(\rho) \subseteq U$ und definieren: $\rho_i(e) = \begin{cases} \rho(p_i(e))\tau_i(e), & p_i(e) \in U \\ 0_{p_i(e)}, & p_i(e) \notin U \end{cases}$

Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach i:

$i = 1$:

Dieser Fall ist klar, denn die Abbildung $\sigma_1 : E_1|Y \to E_0|Y$ entspricht einem Schnitt $Y \to Hom(E_1, E_0)$. Dieser lässt sich zu einem Schnitt $X \to Hom(E_1, E_0)$ fortsetzen, welcher wiederum einem Morphismus $\tau_1 : E_1 \to E_0$ über ganz X entspricht. Dann ist

$$E_1 \xrightarrow{\tau_1} E_0 \longrightarrow 0$$

offensichtlich ein Komplex von Vektorbündeln.

$i \to i+1$

Angenommen auf einer abgeschlossenen Umgebung U_i von Y in X können wir $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ zu $\tau_1, \ldots, \tau_i$ erweitern, so dass

$E_i|U_i \xrightarrow{\tau_i} E_{n-1}|U_i \xrightarrow{\tau_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\tau_1} E_0|U_i \longrightarrow 0$ ein Komplex über U_i ist. Definiere $K_i = ker(\tau_i)$. Wie oben definiert σ_{i+1} einen Schnitt $Y \to Hom(E_{i+1}, E_i)$. Da $im(\sigma_{i+1}) = ker(\sigma_i) \subseteq K_i$ ist dieser auch ein Schnitt $Y \to Hom(E_{i+1}, K_i)$. Also kann dieser Schnitt auf eine Umgebung V von Y mit $V \subseteq U_i$ fortgesetzt werden. Wie oben können wir also σ_{i+1} auf dieser Umgebung zu einem Morphismus $\tau_{i+1} : E_{i+1} \to K_i$ fortsetzen. Da $\sigma_{i+1} : E_{i+1}|Y \to K_i|Y = ker(\tau_i|Y) = ker(\sigma_i) = im(\sigma_{i+1})$ surjektiv ist können wir eine abgeschlossene Umgebung $U_{i+1} \subseteq U_i$ von Y finden, so dass $\tau_{i+1} : E_{i+1}|U_{i+1} \to K_i|U_{i+1}$ surjektiv ist. Dies machen wir wie folgt: Ist $y \in Y$, so ist $(\tau_{i+1})_y$ surjektiv. Dann existiert nach [Ati67] S.12 unten eine Umgebung U_y von y mit $dim((\tau_{i+1})_y((E_{i+1})_y) \leq dim((\tau_{i+1})_x((E_{i+1})_x))$ für alle $x \in U_y$. Schneiden wir diese mit einer Umgebung von y über der E_{i+1} trivial ist, so erhalten wir eine Umgebung V_y von y, so dass $\tau_{i+1}|V_y$ ein Epimorphismus ist. Definiere nun $V := \bigcup_{y \in Y} V_y$. Dann ist V offen und $\tau_{i+1}|V$ ist ein Epimorphismus. Da X kompakt, also insbesondere lokalkompakt, existiert ein $O \in X$ offen mit $Y \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq V$. Setze $U_{i+1} = \overline{O} \cap U_i$. Dann ist U_{i+1} abgeschlossen, $Y \subseteq \mathring{U}_{i+1} = O \cap \mathring{U}_i$ □

Definition 3.4. Ist $Y \subseteq X$ abgeschlossen, so definieren wir $D_n(X, Y)$ als die Menge der Komplexe von Vektorbündeln über X der Länge n, die exakt über Y sind. Wir sagen $E, F \in D_n(X, Y)$ sind homotop ($E \simeq F$), falls ein $H \in D_n(X \times I, Y \times I)$ existiert, so dass $E \cong H|X \times \{0\}$ und $F \cong H|X \times \{1\}$. Analog definieren wir Homotopie in $C_n(X, Y)$.

Bemerkung 3.5. Homotopie von Komplexen von Vektorbündeln ist eine Äquivalenzrelation.

1. Sei $E \in D_n(X, Y)$ und $\pi : X \times I \to X$ die Projektion. Dann ist
$$0 \longrightarrow \pi^*(E_n) \longrightarrow \pi^*(E_{n-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi^*(E_0) \longrightarrow 0$$
ein Komplex in $D_n(X \times I, Y \times I)$ und es gilt $\pi^*(E_i)|X \times \{t\} \cong E_i$ für alle $t \in I$.

2. Sei $E \overset{H}{\simeq} F$ in $D_n(X, Y)$. Betrachte die Abbildung $f : X \times I \longrightarrow X \times I$ gegeben durch $(x, t) \mapsto (x, 1 - t)$. Dann ist
$$0 \longrightarrow f^*(H_n) \longrightarrow f^*(H_{n-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow f^*(H_0) \longrightarrow 0$$
die gesuchte Homotopie.

3. Seien $E \overset{H}{\simeq} E'$ und $E' \overset{G}{\simeq} E''$ in $D_n(X, Y)$. Definiere stetige Abbildungen $f : X \times [0, 1/2] \to X \times I$, $(x, t) \mapsto (x, 2t)$ und $g : X \times [1/2, 1] \to X \times I$, $(x, t) \mapsto (x, 2t - 1)$. Dann gilt $f^*(H)|X \times \{1/2\} \overset{\varphi}{\cong} g^*(G)|X \times \{1/2\}$. Betrachte weiterhin die Zerlegung $X \times I = X \times [0, 1/2] \cup X \times [1/2, 1]$. Dann definieren die Verklebungen $F_i := H_i \cup_\varphi G_i$ einen Komplex von Vektorbündeln über $X \times I$, sodass $E \overset{F}{\simeq} E''$.

Für den nächsten Beweis benötigen wir noch das folgende technische Resultat:

Lemma 3.6. *Ist $E \in D_n(X, Y)$, so existiert eine abgeschlossene Umgebung V von Y, so dass E auch über Y noch exakt ist.*

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig und U_y eine offene Umgebung von y über der alle E_i trivial sind, das heißt insbesondere, dass $dim(E_i)_x$ für alle $x \in U_y$ konstant ist. Da der Komplex über Y exakt ist, ist $\alpha_1|Y$ surjektiv. Also ist $\dim im((\alpha_1)_x) = \dim(E_0)_x$ konstant für alle $x \in U_y$. Dann ist auch $\dim ker((\alpha_1)_x) = \dim(E_1)_x - \dim im((\alpha_1)_x))$ konstant für alle $x \in U_y$. Dank der Exaktheit ist dann auch $\dim im((\alpha_2)_x)) = \dim ker((\alpha_1)_x)$ konstant für alle $x \in U_y$. Dann aber auch wieder $\dim ker((\alpha_2)_x)$ und so weiter. Induktiv folgt, dass $\dim ker((\alpha_i)_x)$ und $\dim ker((\alpha_i)_x)$ für alle $x \in U_y$ konstant sind. Dann ist der Komplex aber auch schon exakt über U_y, denn es gilt per Definition $im(\alpha_i) \subseteq ker(\alpha_{i-1}$ und wie wir gerade gesehen haben auch $\dim im((\alpha_i)_x) = \dim im((\alpha_i)_y) = \dim ker((\alpha_{i-1})_y) = \dim ker((\alpha_{i-1})_x)$ für alle $x \in U_y$. Setze nun $U = \bigcup_{y \in Y} U_y$. Dann existiert (da X lokalkompakt) eine offene Menge O mit $Y \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq U$. Setze $V := \overline{O}$. $\square$

Wir haben eine kanonische Abbildung $\phi : D_n(X,Y) \to C_n(X,Y)$, die durch Einschränkung der Morphismen gegeben ist.

Lemma 3.7. *Die Abbildung ϕ induziert eine Bijektion*

$$D_n(X,Y)_{\simeq} \longrightarrow C_n(X,Y)/_{\simeq}$$

Beweis. Die Surjektivität folgt aus Lemma 3.3. Wir müssen also nur noch die Injektivität zeigen. Seien dazu $E, F \in D_n(X,Y)$ gegeben, so dass $[E] = [F]$ in $C_n(X,Y)/_{\simeq}$ gilt. Das bedeutet, es existiert ein $H \in C_n(X \times I, Y \times I)$ mit $H|X \times \{0\} \cong E$ und $H|X \times \{1\} \cong F$. Beachte: H ist bereits ein Komplex über $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup Y \times I$. Wir wollen nun zeigen, dass wir H zu einem Komplex über ganz $X \times I$ fortsetzen können. Dann sind E und F auch schon in $D_n(X,Y)$ homotop und damit ist die Abbildung injektiv.
Dies machen wir in 3 Schritten:

1. Zunächst werden wir H skalieren: Sprich wir betrachten ab jetzt den Pullback $s^*(H)$, wobei $s : X \times [1/4, 3/4] \to X \times [0,1]$ gegeben durch $(x,t) \mapsto (x, 2(t-1/4))$. Dann erweitern wir $s^*(H)$ wieder auf ganz $[0,1]$, indem wir $s^*(H)|X \times \{1/4\}$ und $s^*(H)|X \times \{3/4\}$ mit ihren Pullbacks unter den Projektionen $\pi_1 : X \times [0,1/4] \to X \times \{1/4\}$ bzw. $\pi_2 : X \times [3/4,1] \to X \times \{3/4\}$ verkleben.

2. Sei nun V eine abgeschlossene Umgebung von Y in X über der die gegebenen Komplexe E und F noch immer exakt sind. Wende nun Lemma 3.3 auf $Y \times [1/4,3/4] \cup V \times \{1/4\} \cup V \times \{3/4\})$ an. Dann erhalten wir einen Komplex über $X \times [1/4,3/4]$, der mit dem in Schritt 1 definierten Komplex über $V \times \{1/4\}$ und $V \times \{3/4\}$ übereinstimmt.

3. Nun wähle eine Funktion $\rho : X \times I \to [0,1]$ mit

$$\begin{aligned}&\rho \equiv 1 \text{ auf } X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup Y \times I \text{ und}\\ &\rho \equiv 0 \text{ auf } X \setminus V \times \{1/4\} \cup X \setminus V \times \{3/4\}.\end{aligned}$$

   und multipliziere mit den gegebenen Randoperatoren. Dann haben wir einen Komplex über ganz $X \times I$.

□

Lemma 3.8. *Homotope Elemente in $C_n(X,Y)$ induzieren das selbe Element in $\mathcal{L}_n(X,Y)$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Korollar 1.2. □

Lemma 3.9. *Sind $(E,\alpha) \in D_n(X,Y)$ und $(F,\beta) \in D_m(X',Y')$, so definiere $E \otimes F$ durch $(E \otimes F)_k = \bigoplus_{i=0}^{k} (\pi^*(E_i) \otimes \pi'^*(F_{k-i}))$ und Morphismen $\gamma_k : (E \otimes F)_k \to (E \otimes F)_{k-1}$ durch $\gamma_k(x \otimes y) = \alpha_i(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes \beta_{k-i}(y) \in (\pi^*(E_{i-1}) \otimes \pi'^*(F_{k-i})) \oplus (\pi^*(E_i) \otimes \pi'^*(F_{k-i-1}))$ für $x \in \pi^*(E_i)$, $y \in \pi'^*(F_{k-i})$ und erweitere linear. Dabei sind $\pi : X \times X' \to X$ und $\pi' : X \times X' \to X'$ die Projektionen. Dann ist $(E \otimes F, \gamma)$ ein Komplex von Vektorbündeln über $X \times X'$, der über $(X \times Y') \cup (Y \times X')$ exakt ist. Also $E \otimes F \in D_{n+m}((X,Y) \times (X',Y'))$.*

Beweis. Nachrechnen. □

Dies induziert eine Paarung:

$$D_n(X,Y) \otimes D_m(X',Y') \longrightarrow D_{n+m}((X,Y) \times (X',Y'))$$

Lemma 3.10. *Diese Paarung ist verträglich mit Homotopie.*

Beweis. Sind $E, E' \in D_n(X,Y)$, $F, F' \in D_m(X,Y)$ mit $E \overset{H}{\simeq} E'$ und $F \overset{G}{\simeq} F'$, so ist $H \otimes G$ eine Homotopie von $E \otimes F$ nach $E' \otimes F'$. □

Korollar 3.11. *Die oben definierte Paarung induziert dank ϕ eine Paarung*

$$\mathcal{L}_n(X,Y) \otimes \mathcal{L}_m(X',Y') \to \mathcal{L}_{n+m}((X,Y) \times (X',Y'))$$

Lemma 3.12. *Seien $E = [(E_n, \ldots, E_0; \alpha_n, \ldots, \alpha_1)] \in \mathcal{L}_n(X,Y)$ und $F = [(F_n, \ldots, F_0; \beta_m, \ldots, \beta_1)] \in \mathcal{L}_m(X',Y')$. Dann gilt:*

$$\chi(E \otimes F) = \chi(E)\chi(F)$$

Beweis. Falls $Y = Y' = \emptyset$ gilt die Behauptung, denn:

$$\begin{aligned}
\chi(E \otimes F) &= \chi((E \otimes F)_n, \ldots, (E \otimes F)_0) \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} (-1)^i [(E \otimes F)_i] \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} (-1)^i [(\bigoplus_{j=0}^{i} E_j \otimes F_{i-j})] \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} [E_j][F_{i-j}] \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{n+m-i} (-1)^{i+j} [E_i][F_j] \\
&= (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [E_i])(\sum_{j=0}^{m} (-1)^j [F_j] \\
&= \chi(E)\chi(F)
\end{aligned}$$

Damit folgt auch der allgemeine Fall, denn die Paarung

$$K(X,Y) \otimes K(X',Y') \to K((X,Y) \times (X',Y'))$$

war die einzige natürliche Paarung, die kompatibel war mit den Paarungen, die wir im Fall $Y = Y' = \emptyset$ definiert haben. $\square$

Als Anwendung dieser Beschreibung des relativen Produkts wollen wir eine neue Konstruktion des Erzeugers von $\widetilde{K}(S^{2n})$ beschreiben. Dazu brauchen wir noch den folgenden Begriff:

Satz 3.13. *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $r \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $\mathbb{C}$-Vektorraum W und eine multilineare, alternierende Abbildung $\sigma : V^r \to W$, mit der folgenden universellen Eigenschaft:*
Ist $\Phi : V^r \to W'$ eine alternierende multilineare Abbildung in einen $\mathbb{C}$-Vektorraum W', so existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi : W \to W'$ mit $\Phi = \phi\sigma$. Insbesondere ist W bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit $\Lambda^r(V)$ bezeichnet. Weiterhin notiert man $\sigma(a_1, \ldots, a_r) = a_1 \wedge \ldots \wedge a_r$. $\Lambda^r(V)$ heißt das r-te externe Produkt von V.

Wir setzen per Konvention $\Lambda^0(V) = \mathbb{C}$. Beachte auch $\Lambda^1(V) \cong V$.

Wir wollen noch einige Eigenschaften, die wir benötigen festhalten, allerdings ohne Beweis:

1. $v \wedge v = 0 \forall v \in V$
2. $\Lambda^i(V) = 0 \forall i > dim(V)$
3. $\Lambda^n(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \Lambda^k(V) \otimes \Lambda^{n-k}(W)$
4. Für alle $p, q \geq 0$ haben wir eine Abbildung $\Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{p+q}(V)$ gegeben durch $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, v_{p+1} \wedge \ldots \wedge v_{p+q}) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q}$. Ist p oder $q = 0$, so ist die obige Abbildung einfach die Skalarmultiplikation.

Eine gute Einführung ist das Buch *Linear Algebra via Exterior Products* von Sergei Winitzki, welches man hier kostenlos herunterladen kann.

Wir können nun mithilfe von $\Lambda^r(V)$ einen Komplex von Vektorbündeln über V definieren. Setze dazu $E_i = V \times \Lambda^i(V)$ und definiere $V \times \Lambda^i(V) \to V \times \Lambda^{i+1}(V)$ durch $(v, w) \mapsto (v, v \wedge w)$. Das dies einen Komplex definiert folgt aus 1.
Wir wollen zunächst den Fall $V = \mathbb{C}$ betrachten. Dann hat der Komplex wie wir ihn oben definiert haben wegen 2. die Form:

$$0 \to V \times \mathbb{C} \xrightarrow{z} V \times \mathbb{C} \to 0$$

Außerdem ist die einzige nichttriviale Abbildung für alle $v \neq 0$ ein Isomorphismus, denn ist $0 \neq v \in V$, so ist die Abbildung $(z, \lambda) \mapsto (z, \lambda v)$ ein Isomorphismus. Wähle nun eine Metrik und betrachte die Einschränkung dieses Komplexes auf die Einheitskugel $B(V)$. Dann definiert dieser Komplex ein Element in $\mathcal{L}_1(B(V), S(V))$, wobei $S(V)$ die Einheitssphäre bezeichnet. Dies liefert uns via χ_1 ein Element in $K(B(V), S(V)) = \widetilde{K}(B(V)/S(V)) \cong \widetilde{K}(S^2)$.

Lemma 3.14. *Dieses Element ist bis auf ein Vorzeichen der kanonische Erzeuger von $\widetilde{K}(S^2)$. Das heißt, es gilt:*
$\chi_1(V \times \mathbb{C}, V \times V; z) = -([H] - 1)$

Beweis. Wir erinnern zunächst an die Definition von χ_1:
Seien X_1, X_2 zwei Kopien von X und $Y = X_0 \cup_A X_1$ der Raum, in dem gleiche Punkte in A miteinander identifiziert werden. Sei weiterhin $[(E_1, E_0; \alpha)] \in \mathcal{L}_1(X, A)$. Dann ist die Klasse des verklebten Bündels $[E_0 \cup_\alpha E_1] \in K(Y)$. Betrachte nun die exakte Folge

$$0 \to K(X, A) \to K(Y) \stackrel{\mu^*}{\to} K(X) \to 0$$

Dabei ist $\mu : X \cong X_1 \hookrightarrow Y$ die Inklusion. Betrachte nun die Abbildung $\pi : Y \to X_i \cong X$. Diese induziert einen Homomorphismus $\pi^* : K(X) \to K(Y)$ mit $\mu^*\pi^* = id_{K(Y)}$. Also zerfällt die exakte Sequenz und es gilt: $K(Y) = K(X, A) \oplus K(X)$. Dann definiert man $\chi_1(E_1, E_0; \alpha) = [E_0 \cup_\alpha E_1] - \pi^*\mu^*([E_0 \cup_\alpha E_1])$.
In unserem Fall haben wir $S_0(V) \times \mathbb{C} \cup_z S_1(V) \times V \cong H^*$, wobei H^* das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ ist. Dann ist $\mu^*(H)$ ein Vektorbündel über $B(V)$, was zusammenziehbar ist. Also gilt $\mu^*(H^*) = 1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\chi_1(S_1(V) \times \mathbb{C}, S_0(V) \times V, z) &= [H^*] - \pi^*\mu^*([H^*]) \\
&= [H^*] - \pi^*(1) \\
&= [H^*] - 1 \\
&= -([H] - 1)
\end{aligned}$$

□

Sei nun V ein beliebiger n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann haben wir den Komplex:

$$0 \to V \times \Lambda^0(V) \to V \times \Lambda^1(V) \to \cdots \to V \times \Lambda^n(V) \to 0$$

Auf $V \setminus \{0\}$, also insbesondere auf $S(V)$ ist dieser Komplex sogar exakt. Um das zu sehen benötigen wir die folgenden zwei Fakten aus der linearen Algebra:

1. Ist $0 \neq v \in V$, so existiert ein $f \in V^*$ mit $f(v) = 1$.

2. Für jedes $f \in V^*$ haben wir eine lineare Abbildung $\varphi_f : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$ gegeben durch $\varphi_f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = f(v_1)v_2 \wedge \ldots \wedge v_k - f(v_2)v_1 \wedge v_3 \wedge \ldots \wedge v_k + \ldots + (-1)^{k-1} f(v_k)v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k-1}$.

Ist nun also $v \in S(V)$, so existiert nach 1. ein $f \in V^*$ mit $f(v) = 1$. Dann gilt $0 = \varphi_f(v \wedge w) = f(v)w - v \wedge \varphi_f(w)$. Also $w = v \wedge \varphi_f(w)$. Also definiert dieser Komplex insbesondere ein Element $\mathcal{L}_n(B(V), S(V))$.

Korollar 3.15. *Bezeichnet E den oben definierten Komplex, so gilt:*

$$\chi(E) = (-1)^n([H] - 1)^n \in K(B(V), S(V)) \cong \widetilde{K}(S^{2n})$$

Beweis. Zerlege V bezüglich der gegebenen Metrik in eine direkte Summe $V = U \oplus W$ mit $dim(U) = 1$ und betrachte die Komplexe F_U und F_W gegeben durch

$$0 \to U \times \Lambda^0(U) \to U \times \Lambda^1(U) \to 0$$
$$0 \to W \times \Lambda^0(W) \to W \times \Lambda^1(W) \to \cdots \to W \times \Lambda^{n-1}(W) \to 0$$

Dann ist $F_U \otimes F_W \cong E$,denn:

$$\begin{aligned}
(F_U \otimes F_W)_k &= \bigoplus_{i=0}^{k} U \times W \times \Lambda^i(U) \otimes U \times W \times \Lambda^{k-i}(W) \\
&= \bigoplus_{i=0}^{k} U \times W \times \Lambda^i(U) \otimes \Lambda^{k-i}(W) \\
&= U \times W \times \bigoplus_{i=0}^{k} \Lambda^i(U) \otimes \Lambda^{k-i}(W) \\
&\cong U \times W \times \Lambda^k(U \oplus W) \\
&\cong V \times \Lambda^k(U \oplus W) \\
&= E_k
\end{aligned}$$

und die Aussage folgt per Induktion mithilfe der Formel $\chi(E) = \chi(F_U)\chi(F_W)$. $\square$

Allgemeiner kann man diese Konstruktion auch auf ein Vektorbündel V über X anwenden. Sei dazu zunächst $\| \cdot \|\colon V \to [0, \infty)$ eine stetige Abbildung, deren Einschränkung auf jeder Faser eine Norm ist. Beachte, dass jede hermitesche Metrik auf V so eine Norm induziert. Dann definieren wir den sogenannten Thom-Raum X^V als die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von V oder äquivalent dazu als $B(V)/S(V)$. Dann gilt $K(B(V), S(V)) \cong$

$\widetilde{K}(X^V)$. Wir wollen nun wieder mithilfe der äußeren Algebra ein Element in $K(B(V), S(V))$ konstruieren. Sei dazu $\pi : V \to X$ die Projektion des Vektorbündels V. Dann ist $\wedge^k \pi : \Lambda^k(V) \to X$ ebenfalls ein Vektorbündel über X und wir können den Pullback $\pi^*(\Lambda^k(V)) = \{(v, w) \in V \times \Lambda^k(V) | \pi(v) = \wedge^k \pi(w)\}$ bilden. Definiere nun einen Morphismus $\alpha_k : \pi^*(\Lambda^k(V)) \to \pi^*(\Lambda^{k+1}(V))$ durch $\alpha_k(v, w) = (v, v \wedge w)$. Dies liefert einen Komplex:

$$0 \to \pi^*(\Lambda^0(V)) \to \pi^*(\Lambda^1(V)) \to \cdots \to \pi^*(\Lambda^n(V)) \to 0$$

Insbesondere ist die Einschränkung über $S(V)$ wieder exakt. Also erhalten wir wieder via χ ein Element $\lambda_V \in K(B(V), S(V))$.

Satz 3.16. *Das Element λ_V hat die folgenden Eigenschaften:*

1. *Für jeden Punkt $x \in X$ schränkt sich λ_V auf einen Erzeuger von $\widetilde{K}(x^V)$ ein.*
2. *Es gilt $\lambda_{V \oplus W} = \lambda_V \cdot \lambda_W$. Dabei ist dies ein Produkt $\widetilde{K}(X^V) \times \widetilde{K}(X^W) \to \widetilde{K}(X^{V \oplus W})$.*

Beweis. Ist $x \in X$, so ist V_x ein Vektorraum. Wir befinden uns also wieder im oben bereits abgehandelten Fall.
Für die Gleichung in 2. beobachten wir zunächst, dass wenn V, W zwei Vektorbündel über X versehen mit einer hermiteschen Metrik sind, so ist durch $\|(v, w)\| = max\{\|v\|, \|w\|\}$ eine Norm auf jeder Faser gegeben und es folgt direkt aus der Definition der Norm:

$$B(V \oplus W) = B(V) \times B(W) \text{ und}$$
$$S(V \oplus W) = B(V) \times S(W) \cup B(W) \times S(V)$$

Die Formel folgt dann aus Lemma 3.12 und dem natürlichen Isomorphismus $\Lambda^n(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \Lambda^k(V) \otimes \Lambda^{n-k}(W)$ □

Literatur

[Ati67] Michael Francis Atiyah. *K-Theory*. W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[Par08] Efton Park. *Complex Topological K-Theory*. Cambridge University Press, 2008.

[Win10] Sergei Winitzki. *Linear Algebra via Exterior Products*. lulu.com, 2010.