

Geometrie und Symmetrie

Blatt 1
Wintersemester 09/10

PD Dr. M. Joachim
Abgabe: Montag 26.10.2009

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass es zu jeder positiven Zahl ε es eine natürliche Zahl n gibt, so dass

$$1/n < \varepsilon.$$

TIPP: Benutzen Sie das Archimedische Prinzip.

Aufgabe 2: Es seien x und y zwei reelle Zahlen, und es gelte $x < y$. Zeigen Sie, dass es eine rationale Zahl q gibt, für die $x < q < y$ gilt.

TIPP: Zeigen Sie zunächst, dass es eine natürliche Zahl m gibt, so dass $1/m < y - x$ gilt; zeigen Sie dann, dass es eine kleinste ganze Zahl n gibt, so dass $x < n/m$. Um nachzuweisen, dass n/m die gesuchte Eigenschaft hat, müssen sie jetzt nur noch $n/m < y$ verifizieren.

Aufgabe 3: Weisen Sie nach oder widerlegen sie, dass die nachfolgenden Teilmengen Intervalle in \mathbb{R} sind. Geben sie gegebenenfalls das betreffende Intervall an.

(a) $[1, 3] \cap [2, 4]$ (b) $[1, 2] \cap [3, 4]$ (c) $[1, 2] \setminus (1, 2)$ (d) $[1, 2] \cup (2, \infty)$.

Aufgabe 4: Es sei $d_1, d_2, d_3 \dots$ eine Folge von Ziffern aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wir definieren mit der Folge von Ziffern zwei Folgen von Dezimalzahlen (mit endlich vielen Nachkommastellen), indem wir für eine natürliche Zahl n

$$a_n = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$$
$$b_n = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \dots + \frac{d_n + 1}{10^n}$$

setzen. Zeigen Sie dass, dass es genau eine reelle Zahl gibt, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.