Aufgabe A: (Grundlegendes zur Euklidischen Ebene)

(i) Formulieren Sie das Ebenentrennungsaxiom.

(ii) Welche der beiden folgenden Aussagen sind Axiome der Euklidischen Ebene?

(1) Zu jeder Geraden L und jedem Punkt p, gibt es genau eine Gerade M mit $p \in M$ und $M \perp L$.

(2) Sind p und q zwei verschiedene Punkte, so gibt es eine Gerade, die p und q enthält.

Beantworten Sie die Frage durch Ankreuzen der richtigen Antwort:

☐ keine ☐ nur (1) ☐ nur (2) ☐ beide

(iii) Es seien a, b, c drei verschiedene Punkte auf einer Geraden. Welche der folgenden Aussagen sind wahr. Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

☐ $ab + bc = ac$.
☐ $\overrightarrow{ab} \cap \overleftarrow{ab} = \overline{ab}$.
☐ $\overleftrightarrow{ac} = \overrightarrow{ac} \cup \overleftarrow{ac}$.
☐ ab ist eine Teilmenge von $\overrightarrow{ab}$.
☐ Der zu $\overrightarrow{ac}$ entgegengesetze Strahl enthält a.
☐ Für a,b und c gilt die strikte Dreiecksungleichung.

(2+2+3 P.)

Aufgabe B: (Definitionen und Aussagen zu Winkeln)

(i) Definieren Sie den Begriff *Scheitelwinkelpaar*.

(ii) Formulieren Sie den Basiswinkelsatz.

(iii) Sei $\triangle abc$ ein Dreieck. Zeigen Sie: Schneidet die Winkelhalbierende bei a die Strecke $\overline{bc}$ in einem rechten Winkel, so ist $\triangle abc$ ein gleichschenkliges Dreieck.

(2+2+3 P.)

Aufgabe C: (Geraden im $\mathbb{R}^2$)

(i) Die Punkte $P_1 = (-2\sqrt{3}, -1)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (\sqrt{3}, 2)$ liegen auf einer Geraden. Zeigen Sie: $P_3 \in \overrightarrow{P_1P_2}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Geraden $L_{1,3,-5}$ und $L_{2,1,-5}$ nicht parallel sind.

(2+2 P.)

Aufgabe D: (Matrizen und Abbildungen, und Isometrien)

(i) Eine Abbildung $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ sei gegeben durch

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\phi\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\phi\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Es seien a, p, q drei verschiedene Punkte auf einer Geraden. Der Punkt p liege zwischen a und q. Sei weiterhin $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Rotation am Punkt a um das (gerichtete) Winkelmaß 60. Zeigen Sie: $\triangle ap\phi(q) \cong \triangle a\phi(p)q$.

(2+4 P.)