

1 Die Euklidische Ebene

§1 Die reellen Zahlen: $\diamond \mathbb{R} \diamond$ Grundrechenarten in $\mathbb{R} \diamond$

§2 Das Inzidenzaxiom: \diamond Mengentheoretisches Set-up: Ebene \mathcal{E} , Punkt, Familie der Geraden \mathcal{L} , Gerade \diamond Inzidenzaxiom \diamond Proposition 2.1 (mit Beweis): Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt. \diamond Beispiel \mathbb{R}^2 mit Geraden $L_{a,b,c}$ (ohne Verifizierung der Axiome) \diamond Beispiel: Poincaréscheibe \diamond

§3 Der Abstandsbegriff und das Messlattenaxiom: \diamond Bijektion \diamond Koordinatensystem für eine Gerade \diamond Messlattenaxiom \diamond Betragsfunktion in $\mathbb{R} \diamond$ Definition des Abstandes zwischen zwei Punkten \diamond Eigenschaften der Abstandsfunktion \diamond Definition des Abstandes zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^2 \diamond$ Äquivalenz von Koordinatensystemen von Geraden \diamond Satz 3.1: Messlattenanlegesatz \diamond

§4 Strecken, Winkel und Dreiecke: \diamond Definition von: r liegt zwischen p und q für Punkte p, q, r auf einer Geraden \diamond Proposition 4.1.a: Für je drei verschiedene Punkte auf einer Geraden gilt, dass genau einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen liegt. \diamond Proposition 4.1.b: Für je zwei verschiedene Punkte p und q gibt es einen Punkt, der auf der Geraden \overleftrightarrow{pq} liegt und zwischen p und q liegt. \diamond Proposition 4.1.c: Für je zwei verschiedene Punkte p und r gibt es einen Punkt q auf der Geraden \overleftrightarrow{pr} , so dass r zwischen p und q liegt. \diamond Proposition 4.1.d: Für je zwei verschiedene Punkte p und q kann der Mittelpunkt definiert werden. \diamond Strecke \diamond Strahl \diamond entgegengesetzter Strahl \diamond Kongruenz von Strecken \diamond Proposition 4.2 (Abtragung von Strecken): Ist eine Strecke \overline{ab} und ein Strahl \overrightarrow{cd} gegeben, so gibt es genau eine Strecke $\overline{cd'}$ mit $\overline{cd'} \cong \overline{ab}$ und $\overline{cd'} \subset \overrightarrow{cd} \diamond$ Winkel \diamond Dreieck \diamond

§5 Das Ebenentrennungsaxiom: \diamond konvex \diamond Lemma 5.1 (mit Beweis): Sind A und B konvexe Teilmengen, so auch $A \cap B$. \diamond Ebenentrennungsaxiom \diamond Halbebene \diamond Proposition 5.2: Schneidet eine Gerade L die Seite \overline{ac} eines Dreiecks $\triangle abc$, so schneidet L auch \overline{ab} oder \overline{bc} . \diamond Satz 5.3: Ist $\triangle abc$ ein Dreieck und $d \in \text{int} \triangle abc$, so schneidet der Strahl \overrightarrow{ad} die Gerade \overleftrightarrow{bc} in einem Punkt zwischen b und c . \diamond Viereck \diamond

§6 Winkelmaßaxiom: \diamond Winkelmaßaxiom \diamond kongruente Winkel \diamond Scheitelwinkelpaar \diamond Satz 6.1: Die beiden Winkel eines Scheitelwinkelpaares sind kongruent. \diamond Winkelhalbierende \diamond Satz 6.2: Zu jedem Winkel gibt es genau eine Winkelhalbierende. \diamond rechter Winkel \diamond spitzer Winkel \diamond stumpfer Winkel \diamond komplementäre Winkel \diamond senkrecht \diamond Satz 6.3: Zu jedem Punkt p auf einer Geraden L gibt es genau eine Gerade M mit $p \in M$ und $M \perp L$. \diamond Gerichteter Winkel \diamond

§7 Dreiecke und SWS-Axiom: \diamond Vorliegen einer Kongruenz von Dreiecken \diamond kongruente Dreiecke \diamond SWS-Axiom \diamond Satz 7.1 (mit Beweis): Basiswinkelsatz \diamond Satz 7.2: WSW-Kongruenzsatz \diamond Satz 7.3: SSS-Kongruenzsatz \diamond Satz 7.3: Ist p ein Punkt und L eine Gerade, so gibt es genau eine Gerade M mit $p \in M$ und $M \perp L$ (vgl. Satz 6.3). \diamond

§8 Geometrische Ungleichungen: \diamond gerichtete Strecke \diamond äußerer Winkel zu einer gerichteten Strecke in einem Dreieck \diamond zu einem äußeren Winkel gehörige entfernte Innenwinkel \diamond *Satz 8.1:* Ein äußerer Winkel ist stets größer als die ihm zugehörigen entfernten Innenwinkel. \diamond *Satz 8.2:* In einem Dreieck gilt: Die Länge einer Seite ist größer als die Länge einer anderen genau dann, wenn der zur ersten Seite gegenüberliegende Winkel größer ist, als der der zweiten Seite gegenüberliegende. \diamond *Satz 8.3:* strenge Dreiecksungleichung \diamond *Korollar 8.4:* allgemeine Dreiecksungleichung \diamond *Satz 8.5:* SsW-Kongruenzsatz \diamond

§9 Das Parallelenaxiom: \diamond parallel \diamond *Proposition 9.1* (mit Beweis): Sind M_1 und M_2 zwei Geraden, die beide senkrecht auf einer weiteren Geraden L stehen, so sind M_1 und M_2 parallel. \diamond Parallelenaxiom \diamond Wechselwinkelpaar \diamond *Proposition 9.2:* Es seien zwei Geraden M_1 und M_2 und eine weitere Gerade L so gegeben, dass sich Wechselwinkelpaare entstehen. Dann haben die beiden Winkel eines zugehörigen Wechselwinkelpaares genau dann das gleiche Winkelmaß, wenn $M_1 \parallel M_2$. *Satz 9.3* (mit Beweis): In einem Dreieck ist die Summe der Winkelmaße der Innenwinkel stets 180. \diamond Parallelogramm \diamond *Satz 9.4:* Parallelogrammsatz \diamond

2 Isometrien der Euklidischen Ebene

§10 Isometrien der Euklidischen Ebene: \diamond Isometrie \diamond identische Abbildung \diamond Spiegelung an einer Geraden \diamond Translation entlang einer gerichteten Strecke \diamond *Satz 10.1:* Für gerichtete Strecken \overrightarrow{ab} und \overrightarrow{cd} gilt: $\tau_{ab} = \tau_{cd}$ genau dann, wenn $\tau_{ab}(c) = d$. \diamond Punktspiegelung \diamond Rotation um einen gerichteten Winkel bzw. um ein gerichtetes Winkelmaß \diamond

§11 Konkrete Beschreibungen von Isometrien des \mathbb{R}^2 : \diamond 2×2 -Matrizen \diamond Anwenden von 2×2 -Matrizen auf Punkte im \mathbb{R}^2 \diamond Addition und Subtraktion von Punkten im \mathbb{R}^2 \diamond Beschreibung von Translationen und Punktspiegelung mittels obiger Rechenwerkzeuge \diamond

§12 Eigenschaften von Isometrien: \diamond *Satz 12.1:* Eine Isometrie $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ bildet eine Gerade \overleftrightarrow{pq} auf die Gerade $\overleftrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$ ab, und zu jedem Punkt $r' \in \overleftrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$ existiert ein Punkt $r \in \overleftrightarrow{pq}$ mit $\phi(r) = r'$. \diamond *Satz 12.2:* Eine Isometrie $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ bildet einen Strahl \overrightarrow{pq} auf den Strahl $\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$ ab, und zu jedem Punkt $r' \in \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$ existiert ein Punkt $r \in \overrightarrow{pq}$ mit $\phi(r) = r'$. \diamond *Satz 12.3:* Ist $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ eine Isometrie und $\triangle abc$ ein Dreieck, so gilt $\triangle abc \cong \triangle \phi(a)\phi(b)\phi(c)$ \diamond *Korollar 12.4:* Eine Isometrie bildet Winkel auf Winkel ab, und zwar so, dass das Winkelmaß erhalten bleibt. \diamond *Satz 12.5:* Eine Isometrie ϕ hat die Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt q einen Punkt p mit $\phi(p) = q$ gibt. \diamond *Proposition 12.6:* Jede Isometrie ist eine Bijektion. \diamond

§13 Algebraische Eigenschaften der Menge der Isometrien des \mathbb{R}^2 : \diamond Gruppe \diamond *Satz 13.1:* Die Menge der Isometrien auf \mathbb{R}^2 mit der Verknüpfung von Isometrien (als Verknüpfung) und der identischen Abbildung (als neutralem Element) ist eine Gruppe. \diamond Untergruppe \diamond orthogonale Transformation \diamond *Satz 13.2:* Jede orthogonale Transformation ϕ ist von der Form $\phi = \varrho_\theta$ oder $\phi = \varrho_\theta \circ \sigma_x$ -Achse. \diamond Beschreibung einer orthogonalen Transformation durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix \diamond *Satz 13.3:* Liegt eine Kongruenz zwischen Dreiecken $\triangle abc$ und $\triangle a'b'c'$ vor, so gibt es genau eine Isometrie ϕ mit $\phi(a) = a'$, $\phi(b) = b'$ und $\phi(c) = c'$. \diamond

§14 Symmetrien und Symmetriegruppen: \diamond Symmetrie \diamond echte Symmetrie \diamond Symmetriegruppe \diamond *Proposition 14.1* (mit Beweis): Für jede Teilmenge S in \mathbb{R}^2 ist $Sym(S)$ eine Untergruppe von $Isom(\mathbb{R}^2)$. \diamond endliche zyklische Untergruppe \diamond C_m \diamond konjugierte Untergruppen \diamond konjugierte Elemente \diamond *Proposition 14.2:* Für jede Gerade L in \mathbb{R}^2 ist σ_L konjugiert zur Spiegelung an der x -Achse. \diamond D_m \diamond *Satz 14.3:* Satz von Leonardo da Vinci \diamond