Aufgaben zur Vorlesung

Geometrie und Symmetrie

Lösung Aufgabe 15 — PD Dr. M. Joachim
Wintersemester 09/10 — Dienstag 17.11.2009

Aufgabe 15: Zeigen Sie, dass für zwei verschiedene Punkte a und b die folgende Gleichung gilt:

$$\overline{ab} = \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$$

Lösung: Um die Aussage zu beweisen, müssen die folgenden zwei Inklusionen nachgewiesen werden:

$$(1) \quad \overline{ab} \subset \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab} \qquad \text{und} \qquad (2) \quad \overline{ab} \supset \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$$

Nachweis von (1): Es gilt nach Definition, dass

$$\overline{ab} = \{c \in \overleftrightarrow{ab} \mid c = a \text{ oder } c = b, \text{ oder } c \text{ ist zwischen } a \text{ und } b\}$$

Sei nun $c \in \overline{ab}$. Wir betrachten 3 Fälle:

1. Falls $c = a$, dann gilt $c \in \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$, denn
   (a) $a \in \overleftarrow{ab}$, da ....

   ... b nicht zwischen a und a liegt.

   (b) $a \in \overrightarrow{ab}$, da ....

   ... a nicht zwischen a und b liegt.

2. Falls $c = b$, dann gilt $c \in \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$, denn
   (a) $b \in \overleftarrow{ab}$, da ....

   ... b nicht zwischen b und a liegt.

   (b) $b \in \overrightarrow{ab}$, da ....

   ... a nicht zwischen b und a liegt.

3. Falls c zwischen a und c liegt, dann gelten die Aussagen
   (a) $c \in \overleftarrow{ab}$, denn ....

   ... andernfalls würde sowohl b zwischen c und a, als auch c zwischen a und b liegen. Aber nach Vorlesung gilt, dass für drei verschiedene Punkte auf einer Geraden gilt, dass nur genau einer zwischen den beiden anderen liegt. Widerspruch!

   (b) $c \in \overrightarrow{ab}$, denn ....

   ... andernfalls würde sowohl a zwischen c und b, als auch c zwischen a und b liegen. Aber nach Vorlesung gilt, dass für drei verschiedene Punkte auf einer Geraden gilt, dass nur genau einer zwischen den beiden anderen liegt. Widerspruch!

Aus (a) und (b) folgt also auch in diesem Fall, dass $c \in \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$.

In jedem der drei möglichen Fälle gilt also, dass aus $c \in \overline{ab}$ die Aussage $c \in \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$ folgt. Also gilt (1).

Nachweis von (2): Nach Definition von $\overleftarrow{ab}$ und $\overrightarrow{ab}$ folgt, dass für ein Element $c \in \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$ die folgenden Aussagen gelten:

b liegt nicht zwischen c und a, und a liegt nicht zwischen c und b.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. Falls $c = a$, so gilt $c \in \overline{ab}$.
2. Falls $c = b$, so gilt $c \in \overline{ab}$.
3. Falls c von a und b verschiedenen ist, gilt $c \in \overline{ab}$, denn ....

   ... andernfalls würde c nicht zwischen a und b liegen, und dann würde für keinen der drei Punkte a, b, c gelten, dass er zwischen den beiden anderen liegt, im Widerspruch zu der schon zitierterten Aussage aus der Vorlesung.

In jedem der drei Fälle folgt aus $c \in \overleftarrow{ab} \cap \overrightarrow{ab}$ also die Aussage $c \in \overline{ab}$. Also gilt (2).