Notizen zur Vorlesung

Geometrie

Wintersemester 10/11 apl. Prof. Dr. M. Joachim

Eindeutigkeitssatz (und Zusammenfassung der Axiome). Es sei $\mathcal{E}$ eine Menge, die Menge der Punkte; und es sei $\mathcal{L}$ eine Familie von Teilmenge in $\mathcal{E}$, die Familie der Geraden in $\mathcal{E}$. Gelten für diese Daten die folgenden Axiome, so beschreiben sie die *Euklidische Ebene.*

(I.1) $\mathcal{E}$ enthält mindestens drei nichtkollineare Punkte, d. h. es gibt drei Punkte, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen.

(I.2) Sind P und Q zwei verschiedene Punkte in $\mathcal{E}$, so gibt es genau eine Gerade, die P und Q enthält.

(M) Jede Gerade L in $\mathcal{L}$ besitzt ein Koordinatensystem.

(E) Für jede Gerade L besteht das Komplement $\mathcal{E}\backslash L$ aus zwei nicht-leeren konvexen Mengen $\mathcal{H}_L^1$, $\mathcal{H}_L^2$; und für Punkte $P \in \mathcal{H}_L^1$ und $Q \in \mathcal{H}_L^2$ gilt $\overline{PQ} \cap L \neq \emptyset$.

(W.1) Auf der Menge $\mathcal{A}$ der Winkel in $\mathcal{E}$ gibt es eine Winkelmaßfunktion $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, und für jeden Winkel $\sphericalangle PQR$ gilt: $0 < m(\sphericalangle PQR) < 180$.

(W.2) Für jeden Strahl $\overrightarrow{PQ}$ in einer Geraden L und jede Wahl einer Halbebene $\mathcal{H}$ bezüglich L gibt es zu jedem Wert r mit $0 < r < 180$ *genau einen* Strahl $\overrightarrow{PR}$ mit $R \in \mathcal{H}$, sodass $m(\sphericalangle PQR) = r$.

(W.3) Für jedes $R \in \operatorname{int} \sphericalangle PQS$ gilt $m(\sphericalangle PQS) = m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle PRS)$

(W.4) Bilden $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PRS$ ein sich ergänzendes Winkelpaar, so gilt:

$$m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle PRS) = 180$$

(SWS) Sind Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle P'Q'R'$ gegeben und sind zwei Seiten sowie der durch die Seiten definierte Winkel kongruent zu den entsprechenden Bestandteilen des zweiten Dreiecks, so liegt eine Kongruenz zwischen den Dreiecken vor, d.h. es gilt $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$.

(P) Zu jeder Geraden L und jedem Punkt $P \notin L$ gibt es genau eine Gerade L' mit $P \in L'$ und $L \parallel L'$.

Das Standardmodell. Nach dem obigen Eindeutigkeitsatz beschreiben die folgenden Daten die Euklidische Ebene (wir verzichten jedoch auf einen Nachweis der Gültigkeit der Axiome):

- $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{L} = \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 > 0\}$ wobei $L_{a,b,c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$
- Für $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ gilt $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Für drei verschiedene Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ gilt

$$m(\sphericalangle P_0P_1P_2) = \arccos \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}}$$