Übungen zur Vorlesung

Geometrie

Blatt 11 — M. Joachim, F. Springer

Wintersemester 10/11 — keine Abgabe

Aufgabe 1 (Isometrien). *Wir betrachten die folgenden vier Isometrien.*

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \nu_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \circ \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \circ \nu_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \\
\phi_2 &= \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \circ \nu_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \circ \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \\
\phi_3 &= \sigma_x \circ \nu_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \circ \nu_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \\
\phi_4 &= \sigma_x \circ \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \circ \sigma_x
\end{aligned}$$

1. *Welche der obigen Isometrien stimmen überein?*
2. *Welche der obigen Isometrien sind orthogonale Transformationen?*

Aufgabe 2 (Isometrien). *Es sei* $H = \{\iota\} \cup \{\sigma_L | L \parallel x-\mathit{Achse}\}$ *die Menge, die aus der identischen Abbildung* ι *und den Spiegelungen an Geraden, die parallel zur* x*-Achse sind, besteht. Zeigen Sie, dass* H *keine Untergruppe von* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *ist.*

Aufgabe 3 (Symmetriegruppen). *Es sei* $H = \{\iota, \sigma_x, \sigma_y, \rho_{180}\}$.

1. *Zeigen sie, dass* H *eine Untergruppe von* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *ist.*
2. *Geben Sie eine Teilmenge* S *in* $\mathbb{R}^2$ *an, so dass einerseits* $H \subset \mathrm{Sym}(S)$ *und andererseits* $\mathrm{Sym}(S)$ *eine endliche Menge ist.*

Aufgabe 4 (Isometrien/Symmetriegruppen). *Die nachstehenden Teilmengen* H *und* H' *der Gruppe* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *sind Untergruppen. Zeigen Sie, dass die beiden Untergruppen* H *und* H' *zueinander konjugiert sind.*

$$\begin{aligned}
H &= \{\rho_0, \rho_{120}, \rho_{240}, \sigma_x, \rho_{120} \circ \sigma_x, \rho_{240} \circ \sigma_x\} \\
H' &= \{\rho_0, \rho_{120}, \rho_{240}, \sigma_y, \rho_{120} \circ \sigma_y, \rho_{240} \circ \sigma_y\}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.