Übungen zur Vorlesung

Geometrie

Blatt 8 | M. Joachim, F. Springer
Wintersemester 10/11 | Abgabe Montag, den 13.12.2010

Aufgabe 1 (Spiegelungen)**.**

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift für die Punktspiegelung an $P = (2, 3)$ als Isometrie der Ebene $\mathbb{R}^2$ an. Berechnen Sie $\nu_P(1, 0), \nu_P(0, 1), \nu_P(2, 3)$.

(b) Betrachten Sie die Spiegelungen an den Koordinatenachsen. Die Abbildungen seien gegeben durch

$$\sigma_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \sigma_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Darüber hinaus sei der Punkt $O = (0, 0)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\sigma_x \circ \sigma_y = \nu_O$ gilt.

Aufgabe 2 (Komposition von Abbildungen)**.** *Gegeben seien zwei Punkte $P, P' \in \mathbb{R}^2$.*

(a) Berechnen Sie $\nu_P \circ \nu_P$,

(b) Berechnen Sie $\psi = \nu_P \circ \nu_{P'}$,

(c) Berechnen Sie $\phi = \nu_{P'} \circ \nu_P$,

(d) Berechnen Sie $\psi \circ \phi$.

Um welche Typen von Abbildungen handelt es sich jeweils? In welchem Verhältnis stehen ϕ und ψ zueinander?

Aufgabe 3 (Geradenschnitte)**.** *Gegeben seien die Punkte $O = (0, 0), Q = (3, 7), R = (4, -10)$ und die Gerade $h = \overleftrightarrow{OQ}$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von h und der Geraden, die durch R verläuft und senkrecht auf h steht mit der aus der Vorlesung bekannten Formel. Rechnen Sie nach, dass S tatsächlich auf h liegt und dass die Geraden h und $\overleftrightarrow{RS}$ tatsächlich senkrecht aufeinander stehen.*

Aufgabe 4 (Punktspiegelung)**.** *Zeigen Sie, dass die geometrische Definition der Punktspiegelung am Punkt P mit der Algebraischen Definition übereinstimmt.*
Tipp: *Zeigen Sie zunächst, dass der Punkt P der einzige Punkt ist, der von der Abbildung ν_P in der algebraischen Definiton festgehalten wird. Zeigen Sie dann, dass für jeden anderen Punkt $Q \in \mathbb{R}^2$ die Aussage $P \in \overleftrightarrow{Q\nu_P(Q)}$ gilt. Zeigen Sie schließlich, dass $QP = P\nu_P(Q)$ gilt.*

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.