Übungen zur Vorlesung

Geometrie

Blatt 9 — M. Joachim, F. Springer

Wintersemester 10/11 — Abgabe Montag, den 20.12.2010

Aufgabe 1 (Drehungen)**.** Additionstheoreme: *Es gilt:*

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + cos(a)\sin(b) \quad (1)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (2)$$

Sie dürfen diese Formeln ohne Beweis verwenden.
Es sei ρ_α die Drehung mit dem Winkel α um den Ursprung und $\rho_{P,\alpha}$ die Drehung mit dem Winkel α um P. Außerdem sei τ_{PQ} die durch P und Q definierte Translation.

(a) Rechnen Sie nach, dass $\rho_{270} \circ \rho_{60} = \rho_{-30}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\rho_{P,\alpha} \circ \tau_{QP}$ eine Drehung ist.

Aufgabe 2 (Achsenspiegelung)**.**

(a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift für die Achsenspiegelung σ_L an der Geraden $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}$ an.

(b) Beweisen Sie, dass $\sigma_L \circ \sigma_L = Id$, indem Sie die Formel aus der Vorlesung verwenden.

Aufgabe 3 (Koordinatensystem)**.** *Gegeben seien 3 Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, die nicht kollinear sind. Weiter sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der nicht auf $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{AC}$ liegt. M_B sei die Gerade, die P enthält und senkrecht auf $\overleftrightarrow{AB}$ steht und M_C die Gerade, die P enthält und senkrecht auf $\overleftrightarrow{AC}$ steht.*
Zeigen Sie: $M_B \nparallel M_C$.

Aufgabe 4 (Bijektionen)**.** *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* injektiv*, falls die folgende Implikation gilt:*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Eine Abbildung heißt surjektiv*, falls es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, sodass $f(x) = y$.*

(a) Beweisen Sie: Eine Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

(b) Sind folgende Abbildungen bijektiv?

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto 2(x - P) + P; P \in \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.