Aufgabe A: (Grundlegendes zur Euklidischen Ebene)

(i) Formulieren Sie die Winkelmaßaxiome (W.1) - (W.4).

(W.1) :

(W.2) :

(W.3) :

(W.4) :

(ii) Es seien P, Q, R drei verschiedene Punkte auf ein und derselben Geraden. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für eine beliebige Wahl der drei Punkte. Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ R liegt zwischen P und Q impliziert R liegt zwischen Q und P
- ☐ $\overline{PQ} \cup \overline{QR} = \overline{PR}$ impliziert Q liegt zwischen P und R.
- ☐ $\overleftarrow{PQ} \subseteq \overleftarrow{PR}$ impliziert Q liegt zwischen P und R.
- ☐ $\overleftarrow{PR} \cup \overrightarrow{RQ} = \overleftrightarrow{PQ}$.

(2+2 P.)

Aufgabe B: (Dreiecke und Geraden in der Euklidischen Ebene)

(i) Es seien A, B und C drei Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Weiterhin seien A', B' und C' weitere drei Punkte, ebenfalls nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für eine beliebige Wahl der sechs Punkte? Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Gilt $AB = AC = A'B' = A'C'$ und $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle B'A'C')$, so folgt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
- ☐ Gilt $AB = A'B'$, $m(\sphericalangle BCA) = m(\sphericalangle B'C'A')$ und $m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle C'A'B')$, so folgt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.
- ☐ Falls $\triangle ABC \equiv \triangle BCA$ gilt, so gilt auch $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$.
- ☐ Ist $\sphericalangle BAC$ ein stumpfer Winkel, so folgt $\triangle ABC \not\equiv \triangle CBA$.

(ii) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Die folgenden drei Punkte liegen auf ein und derselben Geraden liegen.

$$P_1 = (3,4), \quad P_2 = (4,2), \quad P_3 = (-1,12)$$

- ☐ Die Geraden $L_{2,3,-9}$ und $L_{3,2,-6}$ sind parallel.

(2+2 P.)

Aufgabe C: (Aussage zur Euklidischen Ebene)

(i) Welche der folgenden Aussagen gelten in der Euklidischen Ebene? Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Ist eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\overrightarrow{CD}$ gegeben, so gibt es genau eine Strecke $\overline{CD'}$ mit $\overline{CD'} \cong \overline{AB}$ und $\overline{CD'} \subset \overleftrightarrow{CD}$
- ☐ Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck und $D \in int\sphericalangle ABC$, so schneidet der Strahl $\overrightarrow{AD}$ die Gerade $\overleftrightarrow{BC}$ in einem Punkt zwischen B und C
- ☐ Zwei verschiedene Geraden L und L' sind genau dann parallel, wenn L' in einer der beiden Halbebenen bzgl. L enthalten ist.
- ☐ Besitzen L und L' einen Schnittpunkt, so sind L und L' nicht parallel.

(ii) Welche der folgenden Aussagen gelten sowohl im $\mathbb{R}^2$ als auch in der Poincaré-Scheibe? Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Es gilt der SSS-Kongruenzsatz.
- ☐ Die Summe der Winkelmaße der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt 180.
- ☐ Zu jedem Winkel existiert genau eine Winkelhalbiernde.
- ☐ Sind M_1 und M_2 zwei Geraden, die beide senkrecht auf einer weiteren Geraden L stehen, so sind M_1 und M_2 parallel.

(2+2 P.)

Aufgabe D: (Isometrien des $\mathbb{R}^2$)

Bei den folgenden Fragen tragen Sie bitte Ihr Ergebnis in den jeweils dazu vorgesehenen Kasten ein. Zur Bewertung dieser Aufgabe wird nur ihre Angabe in dem betreffenden Kasten zur Grundlage genommen.

(i) Es seien $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ zwei Punkte des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\tau_{PQ}(Q) = \boxed{} \qquad \tau_{PQ}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(ii) Die folgende Formel beschreibt eine Isometrie im $\mathbb{R}^2$.

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Koordinaten der folgenden Bildpunkte

$$\phi\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \boxed{} \qquad \phi\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(iii) Es sei ϕ die Punktspiegelung am Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine explizite Formel zur Berechnung der Isometrie ϕ an.

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(2+2+2 P.)

Aufgabe E: (Definitionen und Aussagen zu Winkeln)

(i) Definieren Sie den Begriff *Winkelhalbierende*.

(ii) Es seien Punkte A, B, C und A', B', C' des $\mathbb{R}^2$ wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } A' = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ B' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ C' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ kongruent sind.

(iii) Zeigen Sie: Die Schnittmenge eines Strahls mit dem Inneren eines Winkels ist konvex.

(2+2+2+2 P.)

Aufgabe F: (Parallele Geraden / äußerer Winkel in der Euklidischen Ebene)

(i) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sind M_1 und M_2 zwei Geraden, die beide senkrecht auf einer weiteren Geraden L stehen, so sind M_1 und M_2 parallel.

(ii) Definieren Sie den Begriff: *äußerer Winkel zu einer gerichteten Strecke in einem Dreieck.*

(iii) Zeigen Sie: In einem Dreieck $\triangle ABC$ sind die äußeren Winkel zu den gerichteten Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ kongruent.

(iv) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $AB = AC$ und $BC > AC$, so hat der äußere Winkel zur gerichten Strecke $\overline{AB}$ ein Winkelmaß von weniger als 120.

(2+2+3 P.)

Aufgabe G: (Isometrien im $\mathbb{R}^2$)

(i) Es sei

$$T = \{\phi \in Isom(\mathbb{R}^2) \mid \phi \text{ ist eine Translation}\}$$

zeigen Sie, dass T eine Untergruppe ist.

(ii) Weisen Sie nach dass die beiden nachfolgenden Isometrien ϕ_1 und ϕ_2 gleich sind.

$$\phi_1 := \sigma_x \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)}, \qquad \phi_2 := \sigma_y \circ \nu_{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)}$$

(2+2 P.)

Aufgabe H: (Symmetriegruppen)

(i) Formulieren Sie den Satz von Leonardo da Vinci.

(ii) Es sei S die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Geben Sie alle Symmetrien von S an.

(iii) Es sei σ_x die Spiegelung an der x-Achse und σ_y die Spiegelung an der y-Achse. Geben Sie eine Isometrie ϕ an, mit der sie nachweisen können, dass σ_x und σ_y zueinander konjugiert sind.

(3+2+2 P.)