Aufgabe A: (Grundlegendes zur Euklidischen Ebene)

(i) Formulieren Sie das Ebenentrennungsaxiom.
(Bitte dafür den hier bereitgestellten Platz benutzen.)

(ii) Es seien P, Q, R drei verschiedene Punkte auf ein und derselben Geraden. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für eine beliebige Wahl der drei Punkte. Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Es gilt $\overline{PQ} \cap \overline{QR} = \{Q\}$.
- ☐ $\overrightarrow{PQ} \subseteq \overrightarrow{RQ}$ impliziert $\overrightarrow{PR} \subseteq \overrightarrow{PQ}$.
- ☐ Liegt R nicht zwischen P und Q, so gilt $R \notin \overline{PQ}$.
- ☐ Es gilt $PQ + QR - PR \geq 0$.

(2+2 P.)

Aufgabe B: (Dreiecke und Geraden in der Euklidischen Ebene)

(i) Es seien A, B und C drei Punkte in der Euklidischen Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Weiterhin seien A', B' und C' weitere drei Punkte in der Euklidischen Ebene, die ebenfalls nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für eine beliebige Wahl der sechs Punkte? Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Gilt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, so folgt $\triangle BCA \equiv \triangle B'C'A'$.
- ☐ Gilt $AB = BC$ und $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$, so folgt $m(\sphericalangle ABC) = 60$.
- ☐ Gilt $m(\sphericalangle ABC) < m(\sphericalangle A'B'C')$, so folgt $BC < B'C'$.
- ☐ Gilt $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle A'B'C')$, $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$, so folgt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

(ii) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Markieren Sie nur (!) die richtigen Antworten jeweils mit einem Kreuz in dem betreffenden Kasten.

- ☐ Die folgenden drei Punkte liegen auf ein und derselben Geraden liegen.

$$P_1 = (4, 3), \quad P_2 = (-4, -3), \quad P_3 = (0, 7)$$

- ☐ Die Geraden $L_{2,3,5}$ und $L_{4,6,8}$ sind parallel.

(2+2 P.)

Aufgabe C: (Strecken, Strahlen und Geraden)

(i) Es seien P und Q zwei Punkte in der Euklidischen Ebene.

  (a) Definieren Sie $\overline{PQ}$.

  (b) Definieren Sie $\overrightarrow{PQ}$.

(ii) Es seien Punkte P, Q, R des $\mathbb{R}^2$ wie folgt gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  (a) Zeigen Sie, dass die Punkte auf einer Geraden liegen.

  (b) Zeigen Sie: R liegt nicht zwischen P und Q.

(iii) Beweisen Sie: Sind M_1 und M_2 zwei Geraden, die beide senkrecht auf einer weiteren Geraden L stehen, so sind M_1 und M_2 parallel.

(2+2+2+2+3 P.)

Aufgabe D: (Isometrien im $\mathbb{R}^2$)

(i) Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Zeigen oder widerlegen Sie: Die zu A gehörige Abbildung φ_A ist eine Isometrie.

(ii) Weisen Sie nach, dass die beiden nachfolgenden Isometrien ϕ_1 und ϕ_2 gleich sind.

$$\phi_1 := \sigma_x \circ \rho_{-45}, \qquad \phi_2 := \rho_{45} \circ \sigma_x$$

Für den Nachweis können Sie verwenden:

$$\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \;\; \cos(-45) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \;\; \sin(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \;\; \sin(-45) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2+2 P.)