Übungen zur Vorlesung
Geometrie

Wiederholungsblatt — M. Joachim, F. Springer
Wintersemester 10/11 — keine Abgabe

Aufgabe 1 (Wurzelrechnung). *Berechnen Sie folgende Wurzelterme ohne Taschenrechner und geben Sie das Ergebnis soweit vereinfacht wie möglich an.*

(i) $\sqrt{8}$,	*(vii)* $\sqrt{3^2+4^2}$,	*(xiii)* $\sqrt[3]{64}$,
(ii) $\sqrt{27}$,	*(viii)* $\sqrt{5^2+12^2}$,	*(xiv)* $\sqrt[4]{16}$,
(iii) $\sqrt[3]{27}$,	*(ix)* $\sqrt{8^2+6^2}$,	*(xv)* $\sqrt[4]{64}$,
(iv) $\sqrt{4}+\sqrt{2}$,	*(x)* $\sqrt{64}+\sqrt{36}$,	*(xvi)* $\sqrt{7}-\sqrt{3}$,
(v) $\sqrt{27}-\sqrt{3}$,	*(xi)* $\sqrt{3}+\sqrt{12}$,	*(xvii)* $\sqrt{12}-\sqrt{3}$,
(vi) $\sqrt[3]{8}$,	*(xii)* $\sqrt{2}+\sqrt{18}$,	*(xviii)* $\sqrt{18}-\sqrt{2}$.

Aufgabe 2 (Äquivalenzen). *Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen äquivalent sind, oder ob zumindest in einer Richtung die Folgerung richtig ist. Es werden die aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen verwendet.*

	Voraussetzung	***Aussage*** 1	***Aussage*** 2
1.		$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$	$AB = A'B', BC = B'C',$ $AC = A'C'$
2.		$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	$AB = A'B', BC = B'C',$ $AC = A'C'$
3.	$g, h \in \mathcal{L}$	$g \nparallel h$	$g \cap h = \{P\}$ *für ein* $P \in \mathcal{E}$
4.	$g, h \in \mathcal{L}$	$g \parallel h$	$g \cap h = \varnothing$
5.	$\triangle ABC \subseteq \mathcal{E}$	$AB = BC$	$\mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle ABC)$
6.		$AB = A'B', BC = B'C',$ $\mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle C'A'B'),$ $AB < BC$	$\triangle ABC \not\equiv \triangle A'B'C'$
7.	$g \neq h, g = \overleftrightarrow{AB}$	$A \in \mathcal{H}_h^1, B \in \mathcal{H}_h^2$	$g \cap h \neq \varnothing$
8.		$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	$AB = B'C', BC = A'C',$ $\mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = \mathrm{m}(\sphericalangle C'A'B')$
9.	$I_n = [a_n, b_n],$ $a_n < b_n$	$\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \neq \varnothing$	$I_{n+1} \subset I_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$
10.	M, N *endl. Mengen*	$f:\ M \to N$ *ist eine Bijektion*	M *und* N *haben die gleiche Anzahl an Elementen*
11.	$A, B, C \in \mathcal{E}$	B *liegt zwischen* A *und* C	$AB + BC = AC$
12.	$A, B, C \in g,$ $g \in \mathcal{L}$	B *liegt zwischen* A *und* C	$AB + BC = AC$
13.	$P, Q, R, S \in \mathbb{R}^2$	$PQ = RS$	$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$
14.		$L_{a,b,c} = L_{a',b',c'}$	$ab' = a'b$
15.		$L_{a,b,c} \parallel L_{a',b'c'}$	$ab' = a'b$
16.		$L_{a,b,c} \perp L_{a',b'c'}$	$aa' = -bb'$

Aufgabe 3 (Bijektionen)**.**

(a) *Gibt es zwischen folgenden Mengen Bijektionen? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. eine Bijektion an.*

(i) $M = \{0,1,2\}, N = \{a,b\}$,

(ii) $M = \{3,5,7\}, N = \{c,3,3,f\}$,

(iii) $M = \{j,k,l\}, N = \{m,n,o\}$,

(iv) $M = \mathbb{N}, N = \mathbb{Z}$,

(v) $M = L_{1,2,3} \subseteq \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}$,

(vi) $M = L_{0,1,0} \subseteq \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}$,

(vii) $M = L_{1,0,0} \subseteq \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}$,

(viii) $M = \mathbb{R}^2, N = \{\tau_{PQ} | P, Q \in \mathbb{R}^2, \tau_{PQ} \text{ ist die durch } P \text{ und } Q \text{ bestimmte Translation}\}$,

(ix) $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{Z}$,

(x) $M = \mathbb{Q}, N = \mathbb{Z}$.

(b) *Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen Bijektionen sind.*

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$,

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$,

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \exp(x)$,

(iv) $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto X + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(v) $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

(vi) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

(vii) $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto 3(X - P) + P$,

(viii) $pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$,

(ix) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{5 \cdot x + 2 \cdot y}{5 \cdot 5 + 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(x) $\sigma_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, L = L_{3,4,1}$,

(xi) $\nu_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (Kongruenzen)**.**

1. *Definieren Sie die Kongruenz zweier Strecken. Nennen Sie ein Beispiel.*

2. *Definieren Sie die Kongruenz zweier Winkel. Nennen Sie ein Beispiel.*

3. *Definieren Sie die Kongruenz zweier Dreiecke.*

4. *Definieren Sie, wann zwei Dreiecke kongruent sind.*

5. *Formulieren Sie das SWS-Axiom.*

6. *Nennen Sie alle Kongruenzsätze und geben Sie je ein Beispiel an.*

7. *Gilt der SSS-Kongruenzsatz auch, wenn man das Parallelenaxiom nicht fordert?*

8. *Zu welchen der folgenden Datensätze gibt es ein Dreieck $\triangle ABC$ im $\mathbb{R}^2$? Ist das Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt?* ($a = BC, b = AC, c = AB$)

   (a) $a = 3, b = 5, c = 7$;

   (b) $a = 3, b = 5, c = 8$;

   (c) $a = 5, b = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 30$;

   (d) $a = 5, b = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 90$;

(e) $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60, \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 40, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 80$;

(f) $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 79, \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 63, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 52$;

(g) $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 66, \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 33, a = 5$;

(h) $c = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 60, a = b$;

(i) $a = 3, b = 10, \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 45$;

(j) $a = b = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60$,

Aufgabe 5 (Isometrien)**.**

1. *Sei ϕ eine Isometrie. Zeigen Sie für jeden Winkel $\sphericalangle ABC$ gilt $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle \phi(A)\phi(B)\phi(C)$.*
2. *Ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{24}{7} \\ -\frac{20}{7} & \frac{37}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Isometrie?*
3. *Ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Isometrie?*
4. *Geben Sie eine Formel für die Drehung um 45 mit Zentrum $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.*
5. *Gegeben seien zwei verschiedene Geraden L, G in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die sich schneiden. Wir betrachten folgende Abbildung ρ. für einen Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ konstruiere man die Gerade G', die durch P verläuft und parallel zu G ist. Bezeichne den Schnittpunkt dieser Geraden mit L mit S_P. $\rho(P)$ sei der Punkt auf G', der in der anderen Halbebene bezüglich L liegt wie P und den Abstand PS_P zu S_P hat.*

   Welche Voraussetzungen müssen für die Geraden L und G gelten, damit ρ eine Isometrie ist?
6. *Es seien G, L zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$. Ist $\sigma_L \circ \sigma_G$ eine Isometrie? Beweisen Sie Ihre Antwort.*
7. *Um welchen Typ von Abbildung handelt es sich bei $\sigma_L \circ \sigma_G$? (Unterscheiden Sie die Fälle $L \parallel G$ und $L \nparallel G$.)*
8. *Sei $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche Abbildung stellt $\tau_{OP} \circ \rho_\theta \circ \tau_{PO}$ dar?*
9. *Sei $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G = L_{2,2,0}$ und $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Welche Abbildung stellt $\tau_{OP} \circ \sigma_G \circ \tau_{PO}$ dar?*
10. *Zeigen Sie, dass in der Ebene $\mathbb{R}^2$ folgendes gilt: $\nu_P = \rho_{P,180}$.*

Bemerkung: Schreiben Sie Ihre Lösungen immer so auf, dass alle Rechen- oder Denkschritte nachvollziehbar sind.