Übungen zur Vorlesung
Geometrie

Wiederholungsblatt — M. Joachim, F. Springer
Wintersemester 10/11 — Musterlösung
erstellt von: M. Evers, M. Möller, F. Springer, X. Yang

Aufgabe 1 (Wurzelrechnung). *Berechnen Sie folgende Wurzelterme ohne Taschenrechner und geben Sie das Ergebnis soweit vereinfacht wie möglich an.*

(i) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

(ii) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

(iii) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$,

(iv) $\sqrt{4} + \sqrt{2} = \sqrt{2^2} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$,

(v) $\sqrt{27} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

(vi) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$,

(vii) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$,

(viii) $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$,

(ix) $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$,

(x) $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$,

(xi) $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$,

(xii) $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$,

(xiii) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$,

(xiv) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$,

(xv) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{16 \cdot 4} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{4} = 2 \cdot \sqrt{2}$,

(xvi) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$,

(xvii) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$,

(xviii) $\sqrt{18} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe 2 (Äquivalenzen). *Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen äquivalent sind, oder ob zumindest in einer Richtung die Folgerung richtig ist. Es werden die aus der Vorlesung bekannten Bezeichnungen verwendet.*

	Voraussetzung	***Aussage*** 1	***Aussage*** 2
1.		$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$	$AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$
2.		$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	$AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$
3.	$g, h \in \mathcal{L}$	$g \nparallel h$	$g \cap h = \{P\}$ *für ein* $P \in \mathcal{E}$
4.	$g, h \in \mathcal{L}$	$g \parallel h$	$g \cap h = \varnothing$
5.	$\triangle ABC \subseteq \mathcal{E}$	$AB = BC$	$\mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle ABC)$
6.		$AB = A'B', BC = B'C',$ $\mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle C'A'B'),$ $AB < BC$	$\triangle ABC \not\equiv \triangle A'B'C'$
7.	$g \neq h, g = \overleftrightarrow{AB}$	$A \in \mathcal{H}_h^1, B \in \mathcal{H}_h^2$	$g \cap h \neq \varnothing$
8.		$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	$AB = B'C', BC = A'C',$ $\mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = \mathrm{m}(\sphericalangle C'A'B')$
9.	$I_n = [a_n, b_n],$ $a_n < b_n$	$\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \neq \varnothing$	$I_{n+1} \subset I_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$
10.	M, N *endl. Mengen*	$f: M \to N$ *ist eine Bijektion*	M *und* N *haben die gleiche Anzahl an Elementen*

	Voraussetzung	Aussage 1	Aussage 2
11.	$A, B, C \in \mathcal{E}$	*B liegt zwischen A und C*	$AB + BC = AC$
12.	$A, B, C \in g$, $g \in \mathcal{L}$	*B liegt zwischen A und C*	$AB + BC = AC$
13.	$P, Q, R, S \in \mathbb{R}^2$	$PQ = RS$	$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$
14.		$L_{a,b,c} = L_{a',b',c'}$	$ab' = a'b$
15.		$L_{a,b,c} \parallel L_{a',b'c'}$	$ab' = a'b$
16.		$L_{a,b,c} \perp L_{a',b'c'}$	$aa' = -bb'$

LÖSUNG: ***Vereinbarung zur Bezeichnung:***
$\Rightarrow$ *für „Aussage 1* $\Rightarrow$ *Aussage 2, aber Aussage 1* $\not\Leftarrow$ *Aussage 2“;*
$\Leftarrow$ *für „Aussage 1* $\Leftarrow$ *Aussage 2, aber Aussage 1* $\not\Rightarrow$ *Aussage 2“;*
$\Leftrightarrow$ *für „Aussage 1* $\Leftrightarrow$ *Aussage 2“;*
$\not\Leftrightarrow$ *für „weder Aussage 1* $\Rightarrow$ *Aussage 2 noch Aussage1* $\Leftarrow$ *Aussage 2“*

1. $\Leftrightarrow$ *(SSS-Kongruenzsatz)*

2. $\Leftarrow$ *(SSS-Kongruenzsatz)*

3. $\Leftrightarrow$ *(Definition von Parallele: g und h heißen zueinander parallel, wenn entweder* $g = h$ *oder* $g \cap h = \varnothing$ *(nämlich* $|g \cap h| \geq 0$*) ist. „*$g \neq h$ *aber* $|g \cap h| \geq 2$*“ kann man ausschließen (wegen des Axiomes (I.2)). Wenn* $g \nparallel h$*, dann bleibt nichts übrig als* $|g \cap h| = 1$*)*

4. $\Leftarrow$ *(s.* 3*)*

5. $\Leftrightarrow$ *(Notizen zur Paragraph* 5*, letzter Satz auf Seite* 3*)*

6. $\not\Leftrightarrow$ *(vgl. SsW-Kongruenzsatz)*

7. $\Rightarrow$ *(Axiom (E))*

8. $\Leftarrow$ *(SWS-Axiom)*

9. $\Leftarrow$ *(Bemerkung und Kommentar: Auch wenn Aussage* 2 *nicht gilt, wird die Aussage* 1 *immer noch nicht falsch sein)*

10. $\Rightarrow$ *(Die Definition der Gleichmächtigkeit.*

    BEMERKUNG: $\Leftarrow$ *ist* nur *richtig, wenn entweder M und N beide leer sind oder M und N beide ein Punkt sind. Mit anderem Wort: falls* $|M| = |N| = 0$ *(bzw.*$|M| = |N| = 1$*), dann gibt es von M in N (zwangsläufig) nichts anderes als Bijektionen)*

11. $\Rightarrow$ *(Notizen zu Paragraph* 3*, die erste Definition auf Seite* 1*, für die Rückrichtung müsste aber zusätzlich gefordert werden, dass die Punkte paarweise verschieden sind)*

12. $\Rightarrow$ *(Besonderer Fall von* 11*)*

13. $\Leftrightarrow$ *(Notizen zur Paragraph* 3*, die letzte Definition auf Seite* 1*)*

14. $\Rightarrow$ *(s. Blatt* 7*, Aufgabe* 1 *(a))*

15. $\Leftrightarrow$ *(Die Steigung der Gerade* $L_{a,b,c}$ *ist* $-\dfrac{a}{b}$*)*

16. $\Leftrightarrow$ *(wie Blatt* 7*, Aufgabe* 1 *(b))*

Aufgabe 3 (Bijektionen)**.**

(a) Gibt es zwischen folgenden Mengen Bijektionen? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. eine Bijektion an.

(i) $M = \{0, 1, 2\}, N = \{a, b\}$,

LÖSUNG: *Nein. Es gibt keine Injektion* $M \to N$ *(siehe Aufgabe* 4 *des Übungsblatts* 9*).*

(ii) $M = \{3, 5, 7\}, N = \{c, 3, 3, f\}$,

LÖSUNG: *Ja.* $3 \mapsto c, 5 \mapsto 3, 7 \mapsto f$ *ist eine. (*BEMERKUNG: *Es ist unerheblich, wie häufig man ein Element in die Aufzählung der Elemente schreibt,so lange es mindestens einmal vorkommt.)*

(iii) $M = \{j, k, l\}, N = \{m, n, o\}$,

LÖSUNG: *Ja.* $j \mapsto m, k \mapsto n, l \mapsto o$ *ist eine.*

(iv) $M = \mathbb{N}, N = \mathbb{Z}$,

LÖSUNG: *Ja.* $2n \mapsto n, 2n+1 \mapsto -n$ *ist eine. (Oder mit einheitlicher Vorschrift* $2n+i \mapsto (-1)^i n, (i = 0, 1)$*)*

(v) $M = L_{1,2,3} \subseteq \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}$,

LÖSUNG: *Ja.* $L_{1,2,3} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \stackrel{pr_1}{\to} \mathbb{R}$ *ist eine, wobei* $\hookrightarrow$ *die Inklusion,* $\stackrel{pr_1}{\to}$ *die Projektion* $(x, y) \mapsto (x, 0)$ *ist (siehe (b)(viii)).*

(vi) $M = L_{0,1,0} \subseteq \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}$,

LÖSUNG: *Ja.* $L_{0,1,0} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \stackrel{pr_1}{\to} \mathbb{R}$ *ist eine.*

(vii) $M = L_{1,0,0} \subseteq \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}$,

LÖSUNG: *Ja.* $L_{1,0,0} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \stackrel{pr_2}{\to} \mathbb{R}$ *ist eine, wobei* $\stackrel{pr_2}{\to}$ *die Projektion* $(x, y) \mapsto (0, y)$ *ist.*

*(*BEMERKUNG: *die Bijektionen (v)-(vii) sind Koordinatensysteme (s. Notizen zur Paragraph* 2*, Seite* 3*) und Isometrien.)*

(viii) $M = \mathbb{R}^2, N = \{\tau_{PQ} | P, Q \in \mathbb{R}^2, \tau_{PQ}$ *ist die durch* P *und* Q *bestimmte Translation*$\}$,

LÖSUNG: *Ja.* $\omega : N \to M, \tau_{PQ} \mapsto Q - P$ *und* $\tau : M \to N, P \mapsto \tau_{OP}$*, wobei* $O = (0, 0)$ *der Ursprung ist, sind ein Paar zueinander inverser Abbildungen.*

*(*BEMERKUNG ZUR BEZEICHNUNG: ω *ist ein griechisches o; es steht für „Original“, „Ursprung“.* τ *ist ein griechisches t; es steht für „Translation“, „Verschiebung“.)*

(ix) $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{Z}$,

LÖSUNG: *Nein.* $\mathbb{R}$ *ist gleichmächtig wie die (oder äquipotent zur) Potenzmenge von* $\mathbb{Z}$ *(die Potenzmenge einer Menge* N *ist die Menge aller Abbildungen von* N *in* $\{0, 1\}$*). Der Satz von Cantor besagt, dass eine Menge hat stets eine kleinere Mächtigkeit als ihre Potenzmenge hat. (Im Fall einer endlichen Mengen, ist die Mächtigkeit der Menge die Anzahl der Elemente der Menge. s. Aufgabe* 2*,* 10*.) Stichwort: Cantors zweites Diagonalargument.*

(x) $M = \mathbb{Q}, N = \mathbb{Z}$.

LÖSUNG: *Ja. Georg Cantor hat einen sehr technischen Beweis dafür abgeliefert, den ich in dieser Stelle nicht ausführen möchte. Stichwort: Cantors erstes Diagonalargument.*

(b) Entscheiden Sie, ob folgende Abbildungen Bijektionen sind.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$,

LÖSUNG: *Ja. Seine Umkehrabbildung ist* f *selbst.*

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$,

LÖSUNG: *Nein. g ist nicht surjektiv (siehe Aufgabe 4 des Übungsblatts 9), denn 0 wird nicht getroffen, d.h. es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, sodass $g(x) = 0$ wäre.*

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \exp(x)$,

LÖSUNG: *Ja.* $\exp = e^{(\ )}$ *hat sich selbst als Ableitung, ist damit streng monoton steigend und folglich injektiv. Surjektivität folgt aus der Tatsache, dass* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$, *sowie der Stetigkeit von* $\exp$.

(iv) $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto X + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

LÖSUNG: *Ja. Seine Umkehrabbildung ist* $X \mapsto X - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(v) $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

LÖSUNG: *Ja. Dies ist die Drehung um* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *um* 30. *Ihre Umkehrabbildung ist die Drehung um* 330.

(vi) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

LÖSUNG: *Nein. A ist weder Injektion, denn* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *hat die Gerade* $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 0 \right\}$, *damit also mehr als einen Punkt, als Urbild, noch Surjektion, denn ein Punkt außerhalb der Gerade* $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x = 2y \right\}$ *hat kein Urbild.*

(vii) $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto 3(X - P) + P$,

LÖSUNG: *Ja.* $s^{-1} : X \mapsto \frac{X+2P}{3}$

(viii) $pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$,

LÖSUNG: *Nein.* pr_1 *ist weder Injektion noch Surjektion. Denn* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *hat mehr als ein Urbild, während* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *hingegen kein Urbild hat.*

(ix) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{5\cdot x+2\cdot y}{5\cdot 5+2\cdot 2} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$,

LÖSUNG: *Ja. π ist die Achsenspieglung an der Gerade* $\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}$ *(siehe Aufgabe 3 des Übungsblatts 8).*

(x) $\sigma_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, L = L_{3,4,1}$,

LÖSUNG: *Ja. Seine Umkehrabbildung ist σ_L selbst (Man verweise auf Blatt 9, Aufgabe 2(b)).*

(xi) $\nu_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \in \mathbb{R}^2$.

LÖSUNG: *Ja. Seine Umkehrabbildung ist ν_P selbst (siehe Aufgabe 2(a) des Übungsblatts 8).*

Aufgabe 4 (Kongruenzen)**.**

1. *Definieren Sie die Kongruenz zweier Strecken. Nennen Sie ein Beispiel.*

   Lösung: *Zwei Strecken* $\overline{PQ}$ *und* $\overline{RS}$ *heißen kongruent, wenn gilt:* $PQ = RS$*; Bsp.:* $P = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = R, Q = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

2. *Definieren Sie die Kongruenz zweier Winkel. Nennen Sie ein Beispiel.*

   Lösung: *Zwei Winkel* $\sphericalangle PQR$ *und* $\sphericalangle STU$ *heißen kongruent, wenn gilt:* $\mathrm{m}(\sphericalangle PQR) = \mathrm{m}(\sphericalangle STU)$*;* *Bsp.:* $P = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = S, Q = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = T, U = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle PQR) = 90 = \mathrm{m}(\sphericalangle STU)$.

3. *Definieren Sie die Kongruenz zweier Dreiecke.*

   Lösung: *Eine Kongruenz zwischen zwei Dreiecken* $\triangle PQR$ *und* $\triangle STU$ *liegt vor, falls:* $PQ = ST, QR = TU, RP = US$ *und* $\mathrm{m}(\sphericalangle PQR) = \mathrm{m}(\sphericalangle STU), \mathrm{m}(\sphericalangle QPR) = \mathrm{m}(\sphericalangle TSU), \mathrm{m}(\sphericalangle RPQ) = \mathrm{m}(\sphericalangle UST)$.

4. *Definieren Sie, wann zwei Dreiecke kongruent sind.*

   Lösung: *Zwei Dreiecke* $\triangle PQR$ *und* $\triangle STU$ *heißen kongruent, falls nach einer geeigneten Umordnung der Eckpunkte eine Kongruenz vorliegt.*

5. *Formulieren Sie das SWS-Axiom.*

   Lösung: *Sind zwei Dreiecke* $\triangle PQR$ *und* $\triangle STU$ *gegeben und sind zwei Seiten sowie der von den Seiten eingeschlossene Winkel des ersten Dreiecks kongruent zu den entsprechenden Teilen des zweiten Dreiecks, so liegt eine Kongruenz zwischen den Dreiecken vor.*

6. *Nennen Sie alle Kongruenzsätze und geben Sie je ein Beispiel an.*

   Lösung:

   1. $\triangle PQR \equiv \triangle P'Q'R' \Leftrightarrow PQ = P'Q', QR = Q'R', RP = R'P'$ *(SSS-Kongruenzsatz)*
   2. *SWS-Kongruenzsatz (siehe oben)*
   3. *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seitenlängen und dem Winkel, der der längeren der beiden Seiten gegenüberliegt, übereinstimmen. (SsW)*
   4. *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkelmaßen und der jeweiligen entsprechenden Seitenlänge übereinstimmen. (SWW- WSW-Satz)*

   Beispiel: $P = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, P' = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, Q' = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, R' = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

   Dann gilt: $PQ = 1 = P'Q'; RP = 1 = R'P'; QR = \sqrt{2} = Q'R'$

   $\Rightarrow$ *SSS-Satz ist anwendbar.*

   Außerdem gilt: $\mathrm{m}(\sphericalangle PQR) = \mathrm{m}(\sphericalangle P'Q'R')$ *und* $PR = P'R'$ *und* $QR = Q'R'$*, wobei* $QR > PQ \Rightarrow$ *SsW ist anwendbar.*

   Nach dem Basiswinkelsatz gilt: $\mathrm{m}(\sphericalangle RPQ) = \frac{180-90}{2} = 45 = \mathrm{m}(\sphericalangle R'P'Q')$ *und weiterhin* $\mathrm{m}(\sphericalangle PQR) = \mathrm{m}(\sphericalangle P'Q'R')$ *und* $PQ = P'Q'$ *(bzw.* $RP = R'P'$*)* $\Rightarrow$ *SWW (bzw. WSW) ist anwendbar.*

7. *Gilt der SSS-Kongruenzsatz auch, wenn man das Parallelenaxiom nicht fordert?*

   Lösung: *Ja, der SSS-Kongruenzsatz gilt auch ohne Parallelenaxiom, da man die konkrete Konstruktion des Dreiecks angeben kann: Man startet mit einer bel. Seite zB.* $\overline{AB}$*. Dann weiß man die Längen* AC *und* BC *und, dass alle Punkte, die gleich weit von einem Punkt entfernt liegen, einen Kreis bilden. Die beiden Kreise mit einmal Radius* AC *um* A *und zum anderen Radius* BC *um* B *haben nach den Inzidenzaxiomen genau zwei Schnittpunkte, sodass nur* *ein Dreieck (bzw. das gespiegelte Dreieck und damit kongruente Dreiecke) entsteht. Für diese Konstruktion wird das Parallelenaxiom nicht benötigt.*

8. *Zu welchen der folgenden Datensätze gibt es ein Dreieck $\triangle ABC$ im $\mathbb{R}^2$? Ist das Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt?* $(a = BC, b = AC, c = AB)$

   (a) $a = 3, b = 5, c = 7$;

   LÖSUNG: $\triangle ABC$ *mit* $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{65}{14} \\ \frac{\sqrt{675}}{14} \end{pmatrix}$ *bildet ein solches Dreieck und dies ist nach dem SSS-Satz eindeutig bis auf Kongruenz.*

   (b) $a = 3, b = 5, c = 8$;

   LÖSUNG: *Es gibt kein solches Dreieck, da im* $\mathbb{R}^2$ *dafür immer die Summe der Längen der beiden kürzesten Dreiecksseiten größer sein muss als die Länge der längsten Seite (strikte Dreiecksungleichung). Hier gilt aber* $a + b = 8 = c$.

   (c) $a = 5, b = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 30$;

   LÖSUNG: $A = \begin{pmatrix} 5\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *bildet ein solches und ist nach dem SWS-Satz das einzige bis auf Kongruenz.*

   (d) $a = 5, b = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 90$;

   LÖSUNG: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *bilden die Eckpunkte eines solchen Dreiecks. Dieses ist nach dem SWS-Satz eindeutig bis auf Kongruenz bestimmt.*

   (e) $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60, \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 40, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 80$;

   LÖSUNG: *Ja, es existiert ein solches Dreieck, da an die Innenwinkelmaße im Dreieck nur die Bedingung geknüpft ist, dass die Summe dieser Maße gleich* 180 *ist. Dies ist hier erfüllt. Ein solches Dreieck ist allerdings nicht eindeutig bis auf Kongruenz bestimmt, da sich die Seitenlängen beliebig (jedoch alle im gleichen Verhältnis) verändern lassen.*

   (f) $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 79, \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 63, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 52$;

   LÖSUNG: *Hier ist* $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) + \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) + \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 79 + 63 + 52 > 180 \Rightarrow$ *es existiert kein solches Dreieck.*

   (g) $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 66, \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 33, a = 5$;

   LÖSUNG: *Es existiert ein Dreieck mit diesen Daten, das man konstruieren kann, indem man* $\overline{BC}$ *mit* $BC = 5$ *aufträgt und dann an* B *den Winkel* β *mit* $\mathrm{m}(\beta) = \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 33$ *zeichnet und an* C *den Strahl zeichnet, der mit* $\overline{BC}$ *den Winkel mit Maß* $\mathrm{m}(\gamma) = \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 180 - \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) - \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 81$ *bildet. Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen ist dann A. (Nach den Axiomen existieren alle diese Strahlen und Punkte.) Nach dem SWW-Satz ist das Dreieck eindeutig bis auf Kongruenz bestimmt.*

   (h) $c = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 60, a = b$;

   LÖSUNG: $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. *Nach dem Basiswinkelsatz ist das Dreieck mit den gegebenen Daten ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem alle Innenwinkel gleich groß sind. Es folgt, dass es ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge* 5 *ist.* $\Rightarrow$ *es ist eindeutig bis auf Kongruenz bestimmt (SSS).*

   (i) $a = 3, b = 10, \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 45$;

   LÖSUNG: *Es existiert kein Dreieck mit diesen Daten, da die kürzeste Verbindung zwischen dem Strahl* $\overrightarrow{AB}$ *und dem Punkt* C *eine Senkrechte auf den Strahl ist.* $\Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle BAC) = 90 \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle CAB) = 45 \Rightarrow$ *Das Dreieck wäre gleichschenklig mit* $c = 3 \Rightarrow a + c = 6 > 10$ ↯

⇒ Selbst beim „optimalen Winkel“ ist kein Dreieck möglich, da der Abstand von $\overrightarrow{AB}$ zu C immer größer als 3 ist.

(j) $a = b = 5, \mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60,$

LÖSUNG: *siehe (h).*

Aufgabe 5 (Isometrien)**.**

1. *Sei ϕ eine Isometrie. Zeigen Sie für jeden Winkel $\sphericalangle ABC$ gilt $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle\phi(A)\phi(B)\phi(C)$.*

   LÖSUNG: *Nach Voraussetzung gilt: $AB = \phi(A)\phi(B), BC = \phi(B)\phi(C), AC = \phi(A)\phi(C)$. Mit dem SSS-Kongruenzsatz gilt also $\triangle ABC \equiv \triangle\,\phi(A)\phi(B)\phi(C)$ und damit auch $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle\phi(A)\phi(B)\phi(C)$.*

2. *Ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{24}{7} \\ -\frac{20}{7} & \frac{37}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Isometrie?*

   LÖSUNG: *Es gilt $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{7} \\ \frac{37}{7} \end{pmatrix}$. Daher ist $1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{24}{7} \\ \frac{37}{7} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1945}}{7} \approx 6,3$. Also ist ϕ keine Isometrie.*

3. *Ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Isometrie?*

   LÖSUNG: *Es ist $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, also ist $\phi = \rho_{45} \circ \sigma_x$. Da diese beiden Abbildungen bekanntermaßen Isometrien sind, ist auch ihre Komposition eine Isometrie.*

4. *Geben Sie eine Formel für die Drehung um 45 mit Zentrum $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.*

   LÖSUNG: *$\rho_{45} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir für $\rho_{P,45} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

5. *Gegeben seien zwei verschiedene Geraden L, G in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die sich schneiden. Wir betrachten folgende Abbildung ρ. Für einen Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ konstruiere man die Gerade G', die durch P verläuft und parallel zu G ist. Bezeichne den Schnittpunkt dieser Geraden mit L mit S_P. $\rho(P)$ sei der Punkt auf G', der in der anderen Halbebene bezüglich L liegt wie P und den Abstand PS_P zu S_P hat.*

   Welche Voraussetzungen müssen für die Geraden L und G gelten, damit ρ eine Isometrie ist?

   LÖSUNG: *Wenn $G \perp L$ gilt, so beschreibt die Abbildung ρ gerade die Achsenspiegelung an der Geraden L und ist damit auch eine Isometrie. Schneiden sich die Geraden nicht senkrecht, so wollen wir zeigen, dass es sich bei der Abbildung nicht um eine Isometrie handelt.*

   Dazu wählen wir die folgenden Punkte: $S = G \cap L$ und Punkte $L_1, L_2 \in L$, die in verschiedenen Halbebenen bezüglich G liegen und $G_1, G_2 \in G$, die in verschiedenen Halbebenen bezüglich L liegen, sodass $\mathrm{m}(\sphericalangle SL_1G_1) < 90$ und $\mathrm{m}(\sphericalangle G_1L_1S) = 90$. Ferner gelte $SG_1 = SG_2$. Nach der Konstruktionsbeschreibung gilt nun $\rho(L_1) = L_1$ und $\rho(G_2) = G_1$. Offensichtlich gilt jedoch $L_1G_1 = \rho(L_1)\rho(G_2) < L_1G_2$. Somit ist ρ auch keine Isometrie.

6. *Es seien G, L zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$. Ist $\sigma_L \circ \sigma_G$ eine Isometrie? Beweisen Sie Ihre Antwort.*

   LÖSUNG: *Es ist bekannt, dass σ_L und σ_G Isometrien sind. Nach einem Satz aus der Vorlesung bildet die Menge der Isometrien des $\mathbb{R}^2$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe* *und ist somit speziell auch abgeschlossen bezüglich der Komposition als Verknüpfung. Also ist $\sigma_L \circ \sigma_G$ eine Isometrie.*

7. *Um welchen Typ von Abbildung handelt es sich bei $\phi := \sigma_L \circ \sigma_G$? (Unterscheiden Sie die Fälle $L \parallel G$ und $L \nparallel G$.)*

   LÖSUNG: *1. Fall: $L \parallel G$.*

   Da wir nur eine qualitative Aussage machen möchten, können wir uns auf den Fall beschränken, dass $G = L_{1,0,0}$ und $L = L_{1,0,1}$ gilt. Wir wählen die Punkte $A = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Es gilt dann $\phi(A) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \phi(B) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \phi(C) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt aber auch $\phi(A) = \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}(A), \phi(B) = \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}(B), \phi(C) = \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}(C)$. Nach der obigen Aufgabe ist ϕ eine Isometrie und durch die Werte dreier nicht-kollinearer Punkte festgelegt. Also gilt insgesamt $\phi = \tau_{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}$, die Komposition zweier Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden ist also eine Translation. (Der Translationsvektor ist gegeben durch das doppelte eines kürzesten Verbindungsvektors zwischen einem Punkt auf G zu einem Punkt auf L.)

   2. Fall: $L \nparallel G$.

   Es sei S der Schnittpunkt der Geraden G und L. $P_1 \in G$ und $P_2 \in L$ seien so gewählt, dass der Strahl $\overrightarrow{SP_1}$ durch eine Drehung um ein gerichtetes Winkelmaß $\theta < 180$ (gegen den Uhrzeigersinn) auf den Strahl $\overrightarrow{SP_2}$ abgebildet wird. Wie oben sei $\phi = \sigma_L \circ \sigma_G$. Dann gilt $\phi(S) = S, SP_1 = S\phi(P_1), SP_2 = S\phi(P_2), \mathrm{m}(\sphericalangle SP_1\phi(P_1)) = \mathrm{m}(\sphericalangle SP_2\phi(P_2)) = 2\theta$ (als gerichtetes Winkelmaß). ϕ ist also die Drehung um S um das gerichtete Winkelmaß 2θ.

8. *Sei $O = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Welche Abbildung stellt $\tau_{OP} \circ \rho_\theta \circ \tau_{PO}$ dar?*

   LÖSUNG: *Es handelt sich um die Abbildung $\rho_{P,\theta}$. Offensichtlich ist P ein Fixpunkt der Abbildung. Rechnet man die Komposition in Formeln nach, sieht man leicht, dass es sich bei der Abbildung nur um eine Drehung um das gerichtete Winkelmaß θ handeln kann. P ist als Fixpunkt das Drehzentrum.*

9. *Sei $O = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, G = L_{2,2,0}$ und $P = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Welche Abbildung stellt $\tau_{OP} \circ \sigma_G \circ \tau_{PO}$ dar?*

   LÖSUNG: *Es sei $L = L_{2,2,-8}$.*

   BEHAUPTUNG: $\tau_{OP} \circ \sigma_G \circ \tau_{PO} = \sigma_L$.

   BEWEIS: *Wir betrachten die Bilder der Punkte $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Es sei $\sigma = \tau_{OP} \circ \sigma_G \circ \tau_{PO}$. Dann ist $\sigma\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \sigma\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \sigma\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Dies entspricht aber auch den Bildpunkten der Punkte unter der Abbildung σ_L. Diese erhält man beispielsweise mit Hilfe der Formel zur Bestimmung von Lotfußpunkten aus der Vorlesung.*

10. *Zeigen Sie, dass in der Ebene $\mathbb{R}^2$ folgendes gilt: $\nu_P = \rho_{P,180}$.*

    LÖSUNG: *Es gilt $\nu_P(P) = \rho_{P,180}(P) = P$. Außerdem gilt nach der Konstruktion der Punktspiegelung für jeden Punkt S der Ebene, der von P verschieden ist, dass das gerichtete Winkelmaß $\mathrm{m}(\sphericalangle PS\nu_P(S)) = 180$. Damit sind die beiden Abbildugen gleich.*