Propädeutikum der Algebra

(Reicht nicht für die Algebra-Prüfung; ausführlicher Katalog s. “Hauptstudium”.)

Gruppen

1) Def. Gruppe und Untergruppe.
2) Satz von Lagrange mit Beweisidee.
3) Beweis, daß Gruppen mit p Elementen zyklisch sind.
4) Def. zyklisch mit Beispielen und Gegenbeispielen.
5) Charakterisierung der Untergruppen von $\mathbb{Z}$ mit Beweis.
6) Def. Normalteiler.
7) Def. von G/N mit Beweis der Wohldefiniertheit.
8) Wie sieht die kanonische Abbildung $\pi : G \longrightarrow G/N$ aus?
9) Definition eines Homomorphismusses mit Beispiel.
10) Homomorphissatz mit Angabe der Abbildung $\overline{f} : G/Ker\varphi \longrightarrow H$.
11) Beweis der Wohldefiniert von $\overline{f}$?
12) Charakterisierung zyklischer Gruppen mit Beweis.
13) Definition auflösbarer Gruppen.
14) Beispiele und Gegenbeispiele dazu.
15) Definition von S_n und A_n.
16) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ defnieren können und $\text{ord}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \varphi(n)$ begründen können.
17) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definieren können und $\text{ord}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ mit Begründung angeben können.

Ringe

1) Definition Ring, Ideal, Hauptideal.
2) Def. euklidischer Ring mit Beispiel.
3) Definition Hauptidealring mit Beispiel.
4) Beweis euklidisch $\Longrightarrow$ Hauptidealring.
5) Definition prim, irreduzibel und Zusammenhang zwischen diesen Begriffen.
6) Beweis der Äquivalenz im HIR.
7) Def. faktorieller Ring.
8) Beweis, daß Zerlegung in Primelemente stets eindeutig ist.
9) Zusammenhang zwischen HIR und faktoriellen Ringen.
10) Definition Integritätsring mit Beispielen und Gegenbeispielen.
11) Beispiel eines nicht faktoriellen Integritätsringes.
12) Beispiel eines faktoriellen Nicht-HIR.
13) Satz von Gauß.
14) Eisensteinkriterium mit Anwendung auf Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$.
15) Def. Ringhomomorphismus mit Beispielen.

Allgemeine Körpertheorie

1) Definition Körper.
2) Definition Körpergrad $[L : K]$.
3) Definition Basis, lin. unabhängig, Erzeugendensystem bei Vektorräumen.
4) Def. endliche Körpererweiterung.
5) Def. algebraische Körpererweiterung.
6) Satz "endlich $\Longrightarrow$ algebraisch" mit Beweis.
7) Gegenbeispiel mit Begründung, daß Umkehrung falsch ist.
8) Körpergrad bei einfachen Körpererweiterungen $[K(\alpha) : K]$ bei Beispielen berechnen können.
9) Dazu Minimalpolynom mit Begründung angeben können.
10) Gradsatz.
11) Begründen können weshalb Summe von algebraischen Elementen wieder algebraisch ist.
12) Minimalploynom zu $e^{2\pi i/n}$ kennen.
13) Grad dieses Kreisteilungspolynom angeben können.

Galoistheorie

1) Definition normal mit Gegenbeispiel.
2) Definition Zerfällungskörper.
3) Damit Positivbeispiele für normale Körpererweiterungen angeben.
4) Definition seperabel.
5) Weshalb ist $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ seperabel?
6) Definiton Charakteristik mit Beispielen für char $k = 0$ bzw. $\neq 0$.
7) Def. galoisch.
8) Definiton der Galoisgruppe mit Verknüpfung.
9) Hauptsatz der Galoistheorie; Ordnung der Galoisgruppe?
10) Wie geschieht die Zuordnung der Zwischenkörper zu den Untergruppen und umgekehrt?
11) Weshalb permutieren die Galoisautomorphismen die Nullstellen von Polynomen aus $K[X]$?
12) Begründung weshalb $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3}) \supset \mathbb{Q}$ Galoisch ist.
13) Was ist der Körpergrad dabei?
14) Wieviel Galoisautomorphismen gibt es dabei und wie operieren diese auf $\sqrt[3]{2}$ bzw. auf $e^{2\pi i/3}$?
15) Wie sieht die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}/e^{2\pi i/n}) \supset \mathbb{Q}$ aus mit Begründung?