

# Grundstudium

## I. - Infinitesimalrechnung

### 1. Grenzwerte, Folgen, Reihen

$\varepsilon$ -Definition der Konvergenz von Folgen **genau** kennen. Konvergiert eine **Folge** bei beliebiger Umordnung ihrer Glieder gegen denselben Grenzwert? Was bedeutet, daß " $a_n \rightarrow \infty$  strebt"? Definition Häufungspunkt. Beschränkte Folgen haben Häufungspunkt. Monotone beschränkte Folgen sind konvergent. Def. Konvergenz von Reihen. Konvergenzkriterium von Cauchy für Folgen und Reihen, Majorantenkriterium für Reihen (Beweisidee). Notwendig aber nicht hinreichend für Konvergenz ist  $a_n \rightarrow 0$  (weshalb?). Kriterium von Leibniz (weshalb genügt es nicht für Konvergenz von  $\sum (-1)^n a_n$ , dass  $a_n \geq 0$  eine Nullfolge ist?) Wurzel- und Quotientenkriterium (Beweisidee), (weshalb genügt nicht, dass  $a_{n+1}/a_n < 1$  ist?) Absolute Konvergenz (Beispiel einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe). Weshalb ist jede absolut konvergente Reihe konvergent? Wissen: Reihe absolut konvergent  $\iff$  Reihenglieder dürfen umgeordnet werden. Endliche und unendliche geometrische Reihe. (Weshalb konvergiert die geometrische Reihe für  $|x| < 1$ , divergiert für  $|x| \geq 1$ ) Binomischer Satz. Def. von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  kennen, in  $\mathbb{C}$  gut rechnen können (wie löst man z. B. eine Gleichung  $z^n = w$ ?) Eulersche Formeln. Definition von offenen, abgeschlossenen, kompakten Mengen.

### 2. Stetigkeit

Definition injektiv, surjektiv, nicht injektiv, nicht surjektiv für  $f : X \rightarrow Y$  kennen. Definition des Bilds  $f(U)$  für  $U \subset X$  bzw. des Urbilds  $f^{-1}(V)$  für  $V \subset Y$ . Definition von Stetigkeit **genau** kennen ( $\varepsilon - \delta$ -Definition **und** Definition " $\forall$  Folgen  $x_n \rightarrow x_0$  geht  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ). Damit: Summe, Produkt usw. wieder stetig. Was bedeutet  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ? Zwischenwertsatz (warum hat jedes Polynom  $f$  ungeraden Grades eine Nullstelle? Warum ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sogar surjektiv?) Beweisidee des Zwischenwertsatzes. Existenz von Maximum und Minimum über kompakte Mengen (bring Gegenbeispiele, dass für offene Intervalle auch bei stetigen Funktionen kein Maximum existiert; ebenso bei kompakten Intervallen für unstetige Funktionen). Definition der gleichmäßigen Konvergenz. Satz von Weierstraß. Wann ist  $\sum_0^\infty f_n$  wieder stetig? Warum ist z. B.  $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$  stetig?

### 3. Differenzierbarkeit und elementare Funktionen

Definition können und geometrische Interpretation der Differenzierbarkeit. Differenzierbare Funktionen sind stetig (Beweis? Umkehrung?) Mittelwertsatz (Beweisidee: durch lineare Transformation auf Satz von Rolle, diesen durch die Existenz eines Extremwertes  $x_0$  mittels der zu beweisenden Erkenntnis, dass dort  $f'(x_0) = 0$  ist). Was beweist man alles mit Mittelwertsatz (z. B. der Satz  $f' \equiv 0 \implies f$  konstant, der in der Integralrechnung wichtig ist, oder z.B. Monotoniekriterien. Diese Beweise können!)? Satz von L'Hospital können. Taylorformel können. Wie können die Koeffizienten  $a_v$  der Potenzreihe  $f(x) = \sum a_v (x - x_0)^v$  berechnet werden? (Antwort:  $a_v = f^{(v)}(x_0)/v!$ .) Def. Konvergenzradius  $R$ . Weshalb für  $|z - z_0| < R$  Konvergenz, für  $|z - z_0| > R$  Divergenz? (Es ist nicht klar, dass Konvergenzmenge Kreis ist!) Wie ist das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzradius? (Antwort: Im allgemeinen unbestimmt. Wie ist es z. B. bei der geometrischen Reihe bzw. bei der Reihe  $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ ?) Berechnen des Konvergenzradius mit Hadamardscher Formel. Beispiel, dass im Rellen die Taylorreihe zu  $f$  zwar überall konvergiert, aber nicht gegen  $f$  konvergiert [ $f(z) = \exp(-1/z^2)$ ]. Eine Potenzreihe konvergiert i.a. **nicht** gleichmäßig für alle  $z$  auf  $|z - z_0| < R$ , sondern nur für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r$  bei festem  $r < R$  (kompakte Konvergenz). Wann ist  $\sum_{n=0}^\infty f_n$  differenzierbar? Die Differentiationsregeln (Produktregel, Kettenregel, Umkehrfunktionsregel) mit Beweis kennen. Definition von  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $e^x$ ,  $\log x$ ,  $x^a$  kennen und deren Ableitung und deren Bilder zeichnen können. (Wie beweist man die Ableitungsregel für  $\log x$ ?) Weshalb ist  $e^x$  immer

positiv und monoton steigend? Weshalb ist  $e^k := (\sum \frac{1}{n!})^k = \exp(k) := \sum \frac{k^n}{n!}$ ? (Denk an  $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$ !) Weshalb konvergiert die Reihe für  $e^x$  für alle  $x \in \mathbb{C}$ ? Zusammenhang von  $\sin z$ ,  $\cos z$  und  $e^z$  im Komplexen?

Wie bekommt man bei differenzierbaren Funktionen die Extremwerte? Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen (hier ging Mittelwertsatz beim Beweis ein, ausführen können!)

#### 4. Integrale

**Genau** Definition des Riemannsches Integrals in einer reellen Veränderlichen kennen. (Bei **Obersumme** wird das sup über gewisse Funktionswerte betrachtet; beim **Oberintegral** wird das inf über alle Obersummen zu allen Zerlegungen genommen; bitte genau angucken!) Def. von inf und sup? Stetige Funktionen sind integrierbar (dies liegt daran, dass stetige Funktionen über einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig sind!) Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung genau kennen (wichtig:  $f$  stetig vorausgesetzt) (Beweis dafür, daß  $\int_a^x f(t)dt$  Stammfunktion ist? Und dafür, daß je zwei Stammfunktionen sich um eine Konstante unterscheiden?). Damit Integrale berechnen können (partielle Integration, Substitutionsregel). Vertauschung von unendlicher Reihe und Integration bei gleichmäßiger Konvergenz. Uneigentliche Integrale definieren können. Def. der  $\Gamma$ -Funktion als uneigentliches Integral. Wann existiert  $\int_0^1 x^{-s}dx$  und  $\int_1^\infty x^{-s}dx$ ? Integralvergleichskriterium für monotone Funktionen mit Anwendungen der Konvergenz von  $\sum \frac{1}{n^s}$ . Längenberechnung von Kurven mittels Integralrechnung.

#### 5. Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

Definition der Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen (partielle Ableitungen). Def. von total differenzierbar. **Hinreichend** für totale Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit der partiellen Ableitungen. Partielle Ableitungen von Beispielen berechnen. Kettenregel im  $\mathbb{R}^n$ . Extrema im  $\mathbb{R}^n$  (Was ist die Hesse-Matrix? Was heißt positiv definit? Praktische Kriterien zur Überprüfung von positiv definit = Hurwitz Kriterium).

## II - Lineare Algebra und Algebra

### 1. Vektorräume und Homomorphismen

Definition linear abhängig, unabhängig, Erzeugendensystem, Basis **genau kennen!** Bei endlich erzeugten Vektorräumen ist äquivalent: Basis, minimales Erzeugendensystem, maximales linear unabhängiges System (warum?). Steinitz'scher Austauschatz. Wozu braucht man den? (Antwort: Jede Basis hat die gleiche Länge!) Definition der Dimension (Wohldefiniertheit?). Weshalb ist  $\dim \mathbb{R}^n = n$ ? (Gib dazu eine Basis an vom  $\mathbb{R}^n$ .) Beispiel eines  $\infty$ -dimensionalen Vektorraumes (z.B.  $k[X]$ ). Geometrische Deutung der Unterräume des  $\mathbb{R}^n$ . Definition Homomorphismus, Isomorphismus, Ker und Bild. Warum ist Ker  $\varphi$ , Bild  $\varphi$  wieder Vektorraum? Warum gilt  $\varphi$  injektiv  $\iff$  Ker  $\varphi = \{0\}$ . Rangsatz  $\dim \text{Bild } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim V$ , wobei  $\varphi : V \rightarrow W$  Homomorphismus. (Beweisidee: Ergänze eine Basis von Ker  $\varphi$  nach Steinitz zu einer Basis von  $V$ .) Anwendung des Rangsatzes:  $\varphi : V \rightarrow V$  Homomorphismus,  $V$  endlich dimensional. Dann ist  $\varphi$  injektiv  $\iff$   $\varphi$  surjektiv (Beweis! Was heißt surjektiv, injektiv?). Gegenbeispiel, dass dies für  $\varphi : V \rightarrow W$  nicht immer gilt und außerdem nicht für  $\varphi : V \rightarrow V$  bei nicht endlich dimensionalem  $V$  (z.B.  $V = k[X]$ ,  $\varphi$  bildet  $\sum a_i X^i$  ab auf  $\sum a_i X^{i+1}$ ). Ein Homomorphismus  $\varphi : V \rightarrow W$  ist schon eindeutig durch die Bilder  $\varphi(v_i)$  definiert, wenn  $\{v_i\}$  eine Basis von  $V$  bedeutet.

### 2. Matrizen und Determinanten

Beziehung zwischen linearen Abbildungen und Matrizen bei fest vorgegebenen Basen  $\{v_i\} \subset V$  und  $\{w_j\} \subset W$  kennen. Weshalb definiert man das Matrizenprodukt so komisch? (Antwort: Weil bei dieser eindeutigen Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen das Matrizenprodukt der

Hintereinanderschaltung der Abbildung entspricht.) Warum ist das Matrizenprodukt assoziativ? Ist es kommutativ? Rang einer Matrix kennen (Zeilenrang = Spaltenrang, ungefähre Beweisidee: z.B. durch elementare Umformungen). Konkrete Berechnung des Ranges vorgegebener Matrizen. Matrix  $M$  invertierbar  $\iff M$  quadratisch  $n \times n$  Matrix und Rang  $M = n$ . Inverse Matrix mittels elementarer Umformungen berechnen können. Wissen, dass  $\dim \text{Bild } \varphi = \text{Rang } M$  ist, wobei  $M$  die zu  $\varphi$  gehörige Matrix (bei fest gewählten Basen) bedeutet (denn Bild  $\varphi$  wird von den Spaltenvektoren von  $M$  erzeugt!) Wenn  $f : V \rightarrow V$  Homomorphismus ist,  $A$  die Matrix für  $f$  bzgl. der Basis  $\{v_i\}$  und  $B$  die Matrix bzgl.  $\{w_j\}$  bedeutet, so ist  $A = SBS^{-1}$  (d. h. die Matrizen sind ähnlich). Definition der Determinanten kennen (z.B.  $d$  ist die eindeutig bestimmte multilineare, alternierende und normierte Abbildung vom Vektorraum der  $n \times n$ -Matrizen nach  $k$ ). Entwicklungssatz nach Zeile oder Spalte kennen. Formel  $d = \sum_{\sigma \in S} \pm a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$  kennen, wobei das Zeichen "+" genommen wird für gerade Permutationen und sonst "-" zu nehmen ist. (Bedeutung dieser Leibniz-Formel: Existenz der oben definierten Determinante. Außerdem sieht man damit, dass  $\det(f - xid)$  ein Polynom ist.)  $\det AB = \det A \cdot \det B$  kennen. Gilt auch  $\det(A + B) = \det A + \det B$ ? Was ist  $\det(\lambda A)$  für  $\lambda \in k$ ? Determinante einer Abbildung  $f : V \rightarrow V$  definiert über Determinante der zugehörigen Matrix. (Bei anderer Basis erhalten wir aber eine andere Matrix, nämlich  $SAS^{-1}$ . Wieso ist  $\det f$  wohldefiniert?) Wissen, dass  $\det f \neq 0$  genau dann, wenn  $f$  Isomorphismus ist.

### 3. Lineare Gleichungen

Homogenes Gleichungssystem. Wann hat dies nichttriviale Lösungen? Inhomogenes Gleichungssystem  $ax = b$ : Wie bekommt man **alle** Lösungen, wenn man **eine** Lösung  $x_0$  kennt? (Antwort: Lösungsmenge =  $x_0 + x$ , wobei  $x$  alle Lösungen des homogenen Systems durchläuft.) Wie sieht also geometrisch die Lösungsmenge aus? Gibt es also ein Gleichungssystem über  $\mathbb{R}$ , dessen Lösungsmenge aus endlich vielen  $n$ -Tupeln besteht? Wann gibt es überhaupt eine Lösung? (Betrachte Rang der erweiterten Matrix.) Wann ist diese Lösung eindeutig? (Rang Matrix =  $n$  = Anzahl der Unbekannten.) Wann ist Gleichungssystem universell lösbar (Rang Matrix =  $m$  = Anzahl der Gleichungen.) Man mache sich diese Aussagen klar, indem man die Ausgangsmatrix  $A$  nach Abschnitt 2 mit der linearen Abbildung  $\varphi : k^n \rightarrow k^m$  identifiziere, dann heißt lösbar  $b \in \text{Bild } \varphi$ ; eindeutig lösbar  $\text{Ker } \varphi = 0 \iff \dim \text{Bild } \varphi = \dim k^n$ ; universell lösbar  $\text{Bild } \varphi = k^m$ .  
(Rangssatz)

Bei quadratischen Gleichungen ist äquivalent: Eindeutig lösbar  $\iff$  universell lösbar  $\iff$  Matrix invertierbar  $\iff$  Determinante  $\neq 0$ . In diesem Fall die Kramersche Regel kennen!

### 4. Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit

Definition Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum. Geometrische Veranschaulichung! Beispiel eines Homomorphismus  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Eigenwerte (z.B. Drehung!). Hat  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  immer Eigenwerte? [Ja, denn Eigenwerte = Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $\det(f - \lambda id)$  (warum?). Dieses Polynom hat den Grad  $\dim V$ , also in diesem Fall Grad 3. Ein Polynom 3. Grades hat immer eine reelle Nullstelle (weshalb?). Kann es eine Abbildung  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  ohne Eigenwerte geben? Dimension des Eigenraumes zu  $\lambda$  berechnen können als Kern der Abbildung  $f - \lambda id$ ! Definition Diagonalisierbarkeit kennen. Satz kennen:

$A$  diagonalisierbar  $\iff V$  besitzt eine Basis von Eigenvektoren zu  $A \iff \det(A - \lambda E)$  zerfällt in Linearfaktoren, und der zu einem Eigenwert  $\lambda_i$  gehörige Eigenraum hat die Dimension  $n_i$ , wobei  $n_i$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_i$  vom charakteristischen Polynom ist.

In der Diagonalen stehen welche Zahlen? Wissen, dass **hinreichend** für Diagonalisierbarkeit ist, dass das charakteristische Polynom in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Notwendig und hinreichend, dass das Minimalpolynom zu  $A$  (was ist das?) in lauter verschiedene Nullstellen zerfällt. Cayley-Hamilton kennen. (Damit folgt: Minimalpolynom hat dieselben Nullstellen wie char. Polynom, aber evtl. von geringerer Vielfachheit.) Ferner schadet es nicht, auch noch zu wissen, dass sich über  $\mathbb{C}$  jede quadratische Matrix in Jordannormalform bringen lässt (wie sieht diese Form aus?).

Wissen, dass Jordannormalform im Wesentlichen eindeutig ist!  
Euklidischer Vektorraum. Beispiele für Skalarprodukte. Überlege Dir, dass bei dem **gewöhnlichen** Skalarprodukt  $(x, y) = 0$  geometrisch wirklich bedeutet, dass  $x$  senkrecht zu  $y$  steht. Def. orthogonale Abbildung. Mach dir klar, dass bei dem gewöhnlichen Skalarprodukt eine orthogonale Abbildung Winkel und Längen erhält, so wie man es von Drehungen und Spiegelungen gewohnt ist. Und die Normalform für orthogonale Abbildungen (die Du kennen solltest!) zeigt, dass orthogonale Abbildungen auch i.w. so beschrieben werden können. Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren. Selbstadjungierte Abbildungen. Wie sehen die zugehörigen Matrizen aus, wie die zugehörigen Eigenwerte? Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen.