Anhang zu §5

In der elementaren Zahlentheorie kann man in einfacher Weise bereits Eigenschaften der Funktion

$$\pi(x) = |P(x)| = \text{Anzahl der Primzahlen } p \le x$$

herleiten, die in Richtung des Primzahlsatzes weisen. Dies sei hier ausgeführt!

1. Abschätzung von $\pi(x)$ nach oben:

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Binomialkoeffizienten

$$(1) \qquad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

Jede Primzahl p mit $n < p \le 2n$ teilt den Zähler von (1), aber nicht den Nenner. Es folgt

$$(2) \qquad \prod_{n<p\le 2n} p \quad \text{ist ein Teiler von } \binom{2n}{n}$$

Das Produkt in (2) besteht aus $\pi(2n)-\pi(n)$ Faktoren, und alle diese sind $> n$, also folgt aus (2)

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \le \binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

und weiter

$$\pi(2n) - \pi(n) < \frac{\log(2^{2n})}{\log n} = 2\log 2\,\frac{n}{\log n},$$

speziell für $n = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$, also

$$(3) \qquad \pi(2^{j+1}) - \pi(2^j) < \frac{2^{j+1}}{j}$$

Wir behaupten, daß daraus folgt:

$$(4) \qquad \pi(2^k) < \frac{2^{k+2}}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Beweis: (4) ist richtig für $k = 1,2,3$. Wir führen Induktion nach k. Sei also $k \ge 4$. Mittels (3) liefert die Induktionsvoraussetzung

$$\pi(2^k) < \pi(2^{k-1}) + \frac{2^k}{k-1} < \frac{2^{k+1}}{k-1} + \frac{2^k}{k-1} = \frac{2^{k+1}+2^k}{k-1} = \frac{2^k \cdot 3}{k-1} = \frac{2^{k+2}}{k} \frac{3}{4} \frac{k}{k-1},$$

und wegen $k \geq 4$ ist $\frac{3}{4}\frac{k}{k-1} \leq 1$.

F1: Für alle reellen $x > 1$ gilt

(5) $$\pi(x) < (8\log 2)\frac{x}{\log x}$$

Beweis: Zu $x > 1$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} < x \leq 2^k$. Mit (4) folgt

$$\pi(x) \leq \pi(2^k) < \frac{2^{k+2}}{k} = 8\,\frac{2^{k-1}}{k} < 8\,\frac{x}{k} = 8\,\frac{x}{\log x}\,\frac{\log x}{k} \leq 8\,\frac{x}{\log x}\,\frac{\log 2^k}{k} =$$

$$8\,\frac{x}{\log x}\cdot \log 2.$$

2. Abschätzung von $\pi(x)$ nach unten:

Im folgenden bezeichne p stets eine Primzahl. Für $a \in \mathbb{N}$ bezeichne $w_p(a)$ den Exponenten, mit dem p in der Primfaktorzerlegung von a vorkommt.

Lemma 1: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

(6) $$w_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots = \sum_{j \geq 1} \left[\frac{n}{p^j}\right]$$

Beweis: klar.

Lemma 2: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(7) $$0 \leq [x+y] - [x] - [y] \leq 1$$

d.h. die ganze Zahl $[x+y]-[x]-[y]$ kann nur gleich 0 oder 1 sein.

Beweis: $x = [x] + \langle x\rangle$, $y = [y] + \langle y\rangle$ mit $0 \leq \langle x\rangle, \langle y\rangle < 1$. Damit ist $x+y = [x]+[y] + \langle x\rangle + \langle y\rangle$, und es folgt $[x+y] = [x]+[y] + [\langle x\rangle + \langle y\rangle]$, und $[\langle x\rangle + \langle y\rangle]$ kann nur 0 oder 1 sein.

<u>Lemma 3</u>: Für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ zu beliebigen $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$(8) \qquad w_p(\tbinom{n}{k}) \leq \frac{\log n}{\log p}$$

<u>Beweis</u>: Wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist $w_p(\binom{n}{k}) = w_p(n!) - w_p(k!) - w_p((n-k)!)$.

Mit Lemma 1 folgt

$$w_p(\tbinom{n}{k}) = \sum_{j \geq 1} \left(\left[\frac{n}{p^j}\right] - \left[\frac{k}{p^j}\right] - \left[\frac{n-k}{p^j}\right] \right).$$ Lemma 2 liefert nun

$w_p(\binom{n}{k}) \leq r$ mit dem maximalen $r \in \mathbb{N}_0$, für das $p^r \leq n$ gilt.

Dieses r erfüllt $r \log p \leq \log n$, also $r \leq \frac{\log n}{\log p}$. Es folgt (8).

<u>Lemma 4</u>: Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$(9) \qquad \binom{n}{k} \leq n^{\pi(n)}$$

<u>Beweis</u>: Habe $\binom{n}{k}$ die Primfaktorzerlegung $\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i}$, und o.E. sei $s \geq 1$. Nach Lemma 3 erfüllt jedes e_i die Ungleichung $e_i \leq \frac{\log n}{\log p_i}$, also $e_i \log p_i \leq \log n$, also $\log(p_i^{e_i}) \leq \log n$ und somit $p_i^{e_i} \leq n$. Es folgt

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i} \leq n^s \leq n^{\pi(n)}.$$

(denn insbesondere sind alle $p_i \leq n$).

<u>F2</u>: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$(10) \qquad \pi(n) \geq \frac{\log 2}{2} \frac{n}{\log n}$$

<u>Beweis</u>: (10) ist richtig für $n = 2,3,4,5$. Sei also $n \geq 6$. Mit Lemma 4 folgt

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq (n+1)\, n^{\pi(n)}, \text{ also}$$

$$n \log 2 \leq \log(n+1) + \pi(n) \log n, \text{ und weiter}$$

$$(11) \quad \pi(n) \geq \log 2 \frac{n}{\log n} - \frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{n}{\log n}\left(\log 2 - \frac{\log(n+1)}{n}\right)$$

Daraus ersieht man, daß (10) für alle n mit

$$\frac{\log(n+1)}{n} \leq \frac{\log 2}{2}$$

gilt. Da diese Ungleichung mit $\log((n+1)^2) \leq \log(2^n)$ äquivalent ist, gilt sie speziell für $n=6$. Aus Monotoniegründen (betrachte die Ableitung der Funktion $\frac{\log(x+1)}{x}$) gilt sie daher für <u>alle</u> $n \geq 6$. –

Mit der Abschätzung (10) kann man sich eigentlich schon zufrieden geben. Ergänzend sei aber festgestellt, daß (10) statt für jedes $n \geq 2$ aus $\mathbb{N}$ auch für jedes $x \geq 2$ aus $\mathbb{R}$ gilt:

<u>F2'</u>: Für alle reellen $x \geq 2$ gilt

$$(12) \quad \pi(x) \geq \frac{\log 2}{2} \frac{x}{\log x}$$

<u>Beweis</u>: Dies aus (11) herzuleiten, ist nur etwas Fleißarbeit: Die Fkt. $f(x) = \frac{x}{\log x}$ ist monoton fallend für $x \leq e$, monoton wachsend für $x \geq e$, denn $f'(x) = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$. Für $2 \leq x \leq e$ ist also $\frac{x}{\log x} \leq \frac{2}{\log 2}$, also $\frac{\log 2}{2} \frac{x}{\log x} \leq 1 = \pi(x)$. Für $e \leq x \leq 3$ ist $\frac{\log 2}{2} \frac{x}{\log x} \leq \frac{\log 2}{2} \frac{3}{\log 3} < 1 = \pi(x)$.
Sei im folgenden also $x \geq 3$.
Für $n := [x]$ gilt $n \leq x < n+1$, also $\log n \leq \log x$ und $n > x-1$.
Setze $c_n := \log 2 - \frac{\log(n+1)}{n}$. Mit (11) folgt dann

$$\pi(x) \geq \pi(n) \geq \frac{n}{\log n} c_n > \frac{x-1}{\log x} c_n = \frac{x}{\log x} c_n - \frac{1}{\log x} c_n =$$

$$\frac{x}{\log x}\left(c_n - \frac{c_n}{x}\right) = \frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log 2}{x} + \frac{\log(n+1)}{x}\right) \geq \frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{\log(2n+2)}{n}\right)$$

Daraus ersieht man, daß (12) für alle x mit $\frac{\log(2n+2)}{n} \leq \frac{\log 2}{2}$ gilt.

Diese Ungleichung gilt speziell für $n = 9$, und wieder aus Monotoniegründen ist sie daher für alle $n \geq 9$ erfüllt (s.o.).

Somit gilt (12) für $x \geq 9$. Für $3 \leq x \leq 9$ ist

$$\frac{\log 2}{2}\frac{x}{\log x} \leq \frac{\log 2}{2}\frac{9}{\log 9} = \frac{\log 2}{\log 3}\cdot\frac{9}{4} < \frac{9}{4}\log 2 < 2 = \pi(x).$$

3. Zusammengefaßt ergeben F1 und F2 also folgenden Satz: Für alle $x \geq 2$ gilt

$$(13) \qquad c_1 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\log x}$$

mit Konstanten $c_1 = \frac{\log 2}{2}$ und $c_2 = 8\log 2$.

Dieser Satz geht auf Tschebyscheff (≈1850) zurück. Danach sind insbesondere die Funktionen $\pi(x)$ und $x/\log x$ von gleicher Größenordnung. Aber ein ganz anderer Kraftaufwand ist nötig, um zu zeigen, daß ihr Quotient für $x \to \infty$ gegen 1 konvergiert:

$$(14) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \qquad (\text{„Primzahlsatz"})$$

Übrigens hat Tschebyscheff gezeigt: Wenn der Limes auf der linken Seite von (14) existiert, so muß sein Wert notwendig gleich 1 sein; vgl. dazu den Anhang von §6.

Ferner zeigte Tschebyscheff: Für alle hinreichend großen x gilt (13) mit den Konstanten $c_1 = \frac{7}{8}$ und $c_2 = \frac{9}{8}$.