Anhang zu §6

Bemerkung 1: Bei Verwendung der Symbole O und o ist eine gewisse Vorsicht geboten: Zum Beispiel folgt aus $f(x) = O(1)$ die Gültigkeit von $f(x) = o(\log x)$. Daraus aber etwa auf

$$O(1) = o(\log x)$$

zu schließen, ist nicht zulässig. Denn für die Funktion $f(x) = \log(\log x)$ gilt zwar $f(x) = o(\log x)$, aber nicht $f(x) = O(1)$.

Bemerkung 2: Nach F1 im Anhang zu §5 gilt

$$\text{(i)} \qquad \pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Als Konsequenz erhält man, daß auch folgende Aussagen gelten:

$$\text{(ii)} \qquad \psi(x) = O(x) \qquad\qquad \text{(iii)} \quad \Theta(x) = O(x)$$

Bew. Definitionsgemäß ist

$$\Theta(x) = \sum_{p \le x}' \log p \le \sum_{p \le x}' \log(x) = \pi(x) \log x = O(x),$$

letzteres nach (i). Damit (iii) bewiesen. Nach §6, F1 ist

$$\psi(x) \le \Theta(x) + \frac{1}{2\log 2} \frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{2}}} x$$

Damit folgt (ii) aus (iii).

Bemerkung 3: Es gilt

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$$

Beweis: Für alle $x \geq 2$ hat man unter Benutzung von (7) in §6:

$$x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\frac{x}{n} = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] + \sum_{n\le x} \Lambda(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle$$

$$= x\log x - x + O(\log x) + \sum_{n\le x} \Lambda(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle$$

Wegen

$$0 \le \sum_{n\le x} \Lambda(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle \le \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \psi(x), \text{ also } \sum_{n\le x} \Lambda(n)\frac{x}{n} = O(\psi(x))$$

ist damit

$$x \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = x\log x - x + O(\log x) + O(\psi(x))$$

Nun benutze man (ii) in Bemerkung 2, d.h. $O(\psi(x)) = O(x)$, und teile durch x; es folgt

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x - 1 + O(1) + O(1) =$$

$$\log x + O(1) + O(1) + O(1) = \log x + O(1)$$

Bemerkung 4: Es gilt

(iii) $$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} \sim \log\log x$$

Dies hat Euler gezeigt, allerdings mit einer Argumentation, die wohl heutigen Anforderungen nicht ganz entspricht. - Die Aussage (iii) ist der folgenden schärferen Aussage enthalten:

Mit einer Konstante c gilt

(iv) $$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

<u>Beweis:</u> Zunächst ist

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p^k\le x}\frac{\log p}{p^k} = \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}$$

Für den zweiten Summanden ist aber

$$\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k} \le \sum_p\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log p}{p^k}\right) = \sum_p \frac{\log p}{p^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \le 2\sum_p\frac{\log p}{p^2} \le 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}}_{=-2\zeta'(2)}$$

also folgt

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} + O(1),$$

und mit Bem. 3 erhalten wir

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$$

Setze nun $A(x) = \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}$, stets $x\ge 2$. Dann ist also

$$A(x) = \log x + r(x) \quad \text{mit einer Funktion } r(x) = O(1).$$

Bezeichne f die charakteristische Funktion von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{N}$. Wir haben

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \sum_{n\le x}\frac{f(n)}{n} = \sum_{n\le x}\frac{f(n)\log n}{n}\cdot\frac{1}{\log n} \overset{\text{Abel}'}{=} A(x)\frac{1}{\log x} + \int_2^x\frac{A(t)}{t\log^2 t}\,dt$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x\frac{dt}{t\log t} + \int_2^x\frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt, \quad \text{also}$$

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = 1 + \log\log x - \log\log 2 + \int_2^x\frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Nun ist jedoch – unter Beachtung von $r(t) = O(1)$ –

$$\int_2^x \frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt = \int_2^\infty \frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt - \int_x^\infty \frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt$$

und $\displaystyle\int_x^\infty \frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt = O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t\log^2 t}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$ [denn wie gesagt ist $-\frac{1}{\log t}$ Stammfunktion von $\frac{1}{t\log^2 t}$].

Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \log\log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

mit der Konstanten $\quad c = 1 - \log\log 2 + \displaystyle\int_2^\infty \frac{r(t)}{t\log^2 t}\,dt$.

<u>Bemerkung 4</u> (Tschebyscheff): Angenommen, für $x\to\infty$ konvergiere $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ gegen einen endlichen Wert c, so folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

<u>Beweis</u>: Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $c \ge 0$, so daß

(1) $$\frac{\pi(x)\log x}{x} = c + \varepsilon(x)$$

gilt mit einer Funktion $\varepsilon(x)$, die für $x\to\infty$ gegen 0 konvergiert:

(2) $$\varepsilon(x) = o(1)$$

Wieder mit f als der charakteristischen Funktion von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{N}$ hat man zunächst

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \sum_{n\le x} f(n)\frac{1}{n} \overset{\text{Abel}}{=} \pi(x)\frac{1}{x} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2}\,dt,$$

mit Blick auf (1) also

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \frac{c+\varepsilon(x)}{\log x} + c\int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt$$

Hier ist der zweite Summand gleich $c\log\log x - c\log\log 2 = c\log\log x + o(\log\log x)$. Der erste Summand ist jedenfalls gleich $o(\log\log x)$. Es folgt

$$(3)\qquad \sum_{p\le x}\frac{1}{p} = c\log\log x + \int_2^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt + o(\log\log x)$$

Wir wollen zeigen, daß der zweite Summand in (3) ebenfalls gleich $o(\log\log x)$ ist. Sei $\delta>0$ vorgegeben. Nach (2) gibt es ein $t_0\ge 2$ mit $|\varepsilon(t)|\le\delta$ für alle $t\ge t_0$. Für alle $x\ge t_0$ ist nun

$$\int_2^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt = \int_2^{t_0} \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt + \int_{t_0}^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt$$

mit
$$\int_{t_0}^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt \le \delta\int_{t_0}^x \frac{dt}{t\log t} \le \delta\log\log x$$

Für alle hinreichend große $x\ge t_0$ ist $\int_2^{t_0}\frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt \le \delta\log\log x$, und es folgt in der Tat

$$\int_2^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt = o(\log\log x)$$

Damit ergibt (3) nun

$$(4)\qquad \sum_{p\le x}\frac{1}{p} = c\log\log x + o(\log\log x)$$

Nach (iii) in Bem. 4 ist andrerseits

$$(5)\qquad \sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + o(\log\log x)$$

Der Vergleich von (4) und (5) liefert jetzt $c=1$, wie behauptet.