§3 Euler-Produkte

In §1 haben wir bewiesen, daß für alle reellen $s > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

Ist das auch für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ richtig?

<u>Vorbemerkung</u> (vgl. Analysis I): Sei $(w_k)_k$ Folge in $\mathbb{C}$. Dann steht

(1) $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$ (unendliches Produkt)

– wie bei unendlichen Summen – zunächst nur für die Folge der Teilprodukte, d.h. die Folge

(2) $\left(\prod_{k=1}^{n} w_k\right)_n$

Die Folge (2) konvergiere gegen ein $w \in \mathbb{C}$. Soll man dann (analog zu unendl. Summen) das unendl. Produkt (1) konvergent nennen (und $w = \prod_{k=1}^{\infty} w_k$ schreiben)?

Doch dann wäre (1) bereits konvergent, wenn nur <u>ein</u> $w_k = 0$ ist. Außerdem konvergiert z.B. für die Folge $w_k = \frac{1}{k}$ die Folge (2) gegen 0, also würde $\prod_{k=1}^{\infty} w_k = 0$ gelten, obwohl alle Faktoren $w_k \neq 0$ sind.

<u>Def.</u> Das unendl. Produkt (1) heißt <u>konvergent</u>, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß die Folge

(3) $\left(\prod_{k=m}^{n} w_k\right)_{n \geq m}$

gegen einen <u>von 0 verschiedenen Grenzwert</u> konvergiert (Insb. muß dann $w_k \neq 0$ für alle $k \geq m$ gelten). Ist (1) in diesem Sinne konvergent, so konvergiert mit (3) auch die Folge (2); bezeichnen wir deren Grenzwert mit $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$ und den von (3) mit $\prod_{k=m}^{\infty} w_k$, so gilt

(4) $$\prod_{k=1}^{\infty} w_k = \left(\prod_{k=1}^{m-1} w_k\right) \cdot \prod_{k=m}^{\infty} w_k \quad \text{mit} \quad \prod_{k=m}^{\infty} w_k \neq 0$$ [1]

Fakt ①. Ist (1) konvergent, so gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k = 0 \iff \exists k \text{ mit } w_k = 0$$

Bew. Dies folgt aus (4).

Fakt ②: Ist (1) konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$.

Bew. o.E. $w_k \neq 0$ für alle k. Dann $w_n = \prod_{k=1}^{n} w_k \Big/ \prod_{k=1}^{n-1} w_k$, und daher $w_n \to 1$ für $n \to \infty$.

Wegen Fakt 2 schreibt man (1) meist in der Gestalt

(5) $$\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$$

mit $a_k := w_k - 1$, also $w_k = 1 + a_k$. Ist (5) konvergent, so gilt

(6) $$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Das Produkt (5) bzw. (1) heißt absolut-konvergent, wenn $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|a_k|)$ konvergent ist. Bekanntlich gilt (vgl. z.B. FTI, S. 266):

Fakt ③: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\iff \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ absolut-konvergent

Ist (5) absolut-konvergent, so ist (5) auch konvergent, mehr noch: jedes aus (5) durch Permutation der Faktoren entstehende Produkt ist konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

[1] und man sieht, daß die linke Seite von (4) unabhängig von der Wahl von m ist.

<u>Def.</u> Eine zahlenth. Funktion f, d.h. eine Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, heißt *multiplikativ*, wenn $f(1) = 1$ und

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2), \text{ falls } ggT(n_1, n_2) = 1$$

Gilt $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$ für <u>alle</u> $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, nebst $f(1) = 1$, so heißt f *vollständig multiplikativ*.

<u>F1:</u> Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikativ, und die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ sei absolut-konvergent für $Re(s) > 1$. Für jedes s mit $Re(s) > 1$ gilt dann

"Euler-Produkt" (1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m) p^{-ms} \right),$$

mit absoluter Konvergenz des unendl. Produkts; ist f sogar vollständig multiplikativ, so gilt

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}$$

<u>Bew.</u> 1) Jede der unendlichen Summen auf der r. S. von (1) ist absolut-konvergent für $Re(s) > 1$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ das ist. – Sei P eine bel. endliche Teilmenge von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{N}(P) = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ hat nur Primteiler aus $P\}$. Da f multiplikativ, folgt

<u>endliches Produkt:</u> (*) $$\prod_{p \in P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = \sum_{n \in \mathbb{N}(P)} \frac{f(n)}{n^s}$$

"Mit wachsendem P konvergiert die rechte Seite gegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. Also konvergiert das unendliche Produkt auf der r. S. von (1), und es gilt (1)."

So in J.P. Serre, A Course in Arithmetic, S. 69 (und auch in weiteren Büchern). Doch diese Argumentation ist nicht vollständig; für Konvergenz eines unendl. Produkts ist mehr zu zeigen (vgl. Vorbemerkung)!

Reparatur: Seien $x_0, x \in \mathbb{N}$ mit $x_0 < x$. Wählt man $P = P_{x, x_0} = \{p \in \mathbb{P} \mid x_0 \le p \le x\}$ in (*), so erhält man

$$\prod_{x_0 \le p \le x} \left(\sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}(P_{x_0,x})}{}' \frac{f(n)}{n^s}$$

Für $x \to \infty$ geht die rechte Seite gegen

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ hat nur Primteiler} \ge x_0}}{}' \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{(konvergent, da } \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{f(n)}{n^s} \text{ absolut-konv.)}$$

Für diesen Grenzwert $w = w(s, x_0)$ gilt aber

$$|w-1| \le \sum_{\substack{n \in \mathbb{N},\ n \ne 1 \\ n \text{ hat nur Primteiler} \ge x_0}}{}' \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \le \sum_{n \ge x_0}{}' \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$$

Die rechte Seite geht mit $x_0 \to \infty$ gegen 0. Also gibt es ein $x_0 \in \mathbb{N}$ mit $w = w(s, x_0) \ne 0$, und damit ist die Konvergenz des unendl. Produkts in (1) wirklich bewiesen.

Das geht einfacher, wenn man Fakt 3 der Vorbem. benützt:

Mit $\sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = 1 + a_p(s)$

gilt $\sum_{p \in \mathbb{P}}{}' |a_p(s)| \le \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| < \infty$, also ist das Produkt

$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + a_p(s))$ absolut konvergent und daher auch <u>konvergent</u>.

2) Sei f jetzt vollständig multiplikativ. Dann hat man $f(p^m) = f(p)^m$ und es folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m)\,p^{-ms} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(f(p)p^{-s}\right)^m = \frac{1}{1-f(p)p^{-s}} .$$

(Aus der Konvergenz der Reihe folgt $|f(p)p^{-s}| < 1$) $\square$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ absolut-konvergent auf $Re(s) > 1$ ist, kann man F1 auf die Funktion $f = 1$ (d.h. $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$) anwenden, die vollständig multiplikativ ist:

F2: Man hat

(3) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \quad \text{auf } Re(s) > 1$$

(4) $\zeta(s) \neq 0$ für jedes s mit $Re(s) > 1$.

⌜Für reelle s mit $s > 1$ ist trivialerweise sogar $\zeta(s) > 0$ ⌟

Bew. Auch (4) ist klar, denn (für festes s mit $Re(s) > 1$) ist jeder der Faktoren $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \neq 0$; nach Fakt ① des Vorkom. kann daher die rechte Seite von (3) für kein s mit $Re(s) > 1$ verschwinden. $\square$

Aus (3) und (4) folgt

(5) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{für } Re(s) > 1$$

(wobei das unendl. Produkt sogar absolut-konv. ist)

Ist das Produkt auf der r.S. von (5) das Euler-Produkt einer Dirichletreihe zu einer multiplikativen Funktion f?

Nach Formel (1) in F1 suchen wir eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $f(1) = 1$ und

(6) $$f(p^m) = \begin{cases} -1 & \text{für } m = 1 \\ 0 & \text{für } m > 1 \end{cases} \quad [\text{für alle } p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}]$$

Offenbar gibt es genau eine multiplikative Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, die das erfüllt, nämlich die Funktion

(7) $$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{wenn } n \text{ nicht quadratfrei} \\ (-1)^r & \text{wenn } n = \text{Produkt von } r \text{ versch. Primzahlen} \end{cases}$$

Wegen $|f(n)| \leq 1$ für alle n, ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ absolut-konvergent für $Re(s) > 1$, und Formel (1) in F1 liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{auf } Re(s) > 1$$

Def. Die durch (6) bzw. (7) definierte multiplikative Funktion wird mit μ bezeichnet und heißt Möbiussche μ-Funktion.

F3: Man hat

(8) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{auf } Re(s) > 1$$

Das Gebiet U der s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist konvex, und ζ hat keine Nullstellen in U. Wie man in FT I lernt, gibt es daher einen (holomorphen) Zweig von $\log \zeta$ auf U, d.h. eine holomorphe Fkt. $g: U \to \mathbb{C}$ mit

$$(9) \qquad e^{g(s)} = \zeta(s) \text{ für alle } s \in U$$

und ein solches g ist bis auf eine additive Konstante c aus $2\pi i \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt. [vgl. FT I, S. 101f]

Da $\zeta(s) > 0$ für reelles $s > 1$, kann man noch verlangen, daß $g(s)$ reell für reelles $s > 1$ ist, wodurch g dann eindeutig bestimmt ist und so die Bezeichnung

$$g = \log \zeta$$

rechtfertigt. (Beachte aber, daß man $\log \zeta$ nicht etwa als Hintereinanderschaltung der Funktion ζ und einer Funktion log ansehen darf.)

Um uns dieses $g = \log \zeta$ zu verschaffen, brauchen wir aber gar nicht auf den obigen Satz der FT I zu verweisen: Wir betrachten einfach die Funktion

$$(10) \qquad g(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}},$$

wobei die rechte Seite nach §2 eine holomorphe Funktion auf $\mathrm{Re}(s) > 1$ vermittelt (Klar? genaue Erläuterung s.w.u.)

Aus Stetigkeitsgründen ist dann

(11) $$e^{g(s)} = e^{\sum_p \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right)} = \prod_p e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}},$$

wobei klar ist, daß das unendliche Produkt wirklich konvergent ist. Da g in (10) auf $\mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt, bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß die r.S. in (11) mit $\zeta(s)$ übereinstimmt:

Für $|z|<1$ ist $1-z$ keine reelle Zahl ≤ 0, also ist $\mathrm{Log}(1-z)$ definiert mit Log als dem Hauptzweig des Logarithmus und es gilt

(12) $$\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$$

⌜Bew. Für die Ableitungen ist $-\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, also gilt (12) bis auf eine Konstante c. Doch für $z=0$ stimmen beide Seiten von (12) überein, also ist $c=0$.⌟

Nach (12) ist nun $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{sm}} = -\mathrm{Log}(1-\frac{1}{p^s})$, also

$$e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{sm}}} = e^{-\mathrm{Log}(1-\frac{1}{p^s})} = \frac{1}{e^{\mathrm{Log}(1-\frac{1}{p^s})}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

Insgesamt ist nach (11) also

$$e^{g(s)} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \overset{(3)}{=} \zeta(s).$$

<u>P.S.1</u> Um die rechte Seite von (10) wirklich korrekt zu erfassen, betrachte die Dirichletreihe

(13) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{wenn } n=p^m \text{ mit } p\in\mathbb{P}, m\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Reihe ist offenbar absolut konv. auf $\mathrm{Re}(s)>1$. Wir können also beliebig umordnen und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{a_n}{n^s} = \sum_{p\in\mathbb{P}}{}' \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{mp^{ms}}$$

Nach §2 vermittelt die Reihe also in der Tat eine holomorphe Funktion auf $Re(s)>1$.

<u>P.S.2</u> Es ist $\log(p^m) = m\log p$, so daß a_n in (13) im Falle $n=p^m$ durch

$$a_n = \frac{\log p}{\log n}$$

gegeben ist. Definiert man daher die Funktion $\Lambda: \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ durch

$$(14)\qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{wenn } n \text{ eine Primpotenz } p^m>1 \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so erhält man für $\log\zeta = g$ mit g wie in (10) die Darstellung

$$(\log\zeta)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^s} \quad \text{für } Re(s)>1$$

Λ heißt die <u>von Mangoldt-Funktion</u> (von Mangoldt ≈ 1895).
Sie wurde aber bereits von Čebyšev (≈ 1852) bei seinen wegweisenden Vorarbeiten zum Primzahlsatz betrachtet.

<u>F4:</u> Mit den obigen Bezeichnungen ist

$$(15)\qquad \log\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^s} \quad \text{für } Re(s)>1$$

der holomorphe Zweig von $\log\zeta$ auf $Re(s)>1$, der für jedes reelle $s>1$ den reellen Wert $\log(\zeta(s))$ besitzt. Es folgt (vgl. (9) und §2, Kr.1 in Satz 1)

$$(16)\qquad (\log\zeta)'(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{für } Re(s)>1$$

(wobei auch die letztgenannte Reihe <u>absolut</u> konvergent ist, vgl. S. 15a)

Bemerkung: Die auf den ersten Blick vielleicht etwas merkwürdig erscheinende Funktion $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ kommt also ganz natürlich ins Spiel, genau wie die Funktion μ, deren Definition ja zuerst auch etwas seltsam anmutet. Im übrigen gibt es eine bedeutsame Relation zwischen Λ und μ, nämlich

$$\Lambda = \mu * \log$$

Zur Erklärung: Sei R die Menge aller zahlenth. Funktionen, d.h. der Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Offenbar ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1 (def. durch $1(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Man kann aber auf R eine andere Multiplikation $*$ definieren und zwar durch

$$(17) \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n}{}' f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{N} \\ kl = n}}{}' f(k) g(l)$$

Offenbar ist $(R, +, *)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ε, definiert durch

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

(ε ist also die charakteristische Funktion der Teilmenge $\{1\}$ von $\mathbb{N}$)

In der Tat ist $(f * \varepsilon)(n) = \sum_{d|n}' f(d)\varepsilon\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\varepsilon(1) = f(n)$.

Die aus der "elementaren Zahlentheorie" geläufige Definition (17) können wir hier wie folgt motivieren: