

### §3 Euler-Produkte

In §1 haben wir bewiesen, daß für alle reellen  $s > 1$  gilt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

ist das auch für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  richtig?

Vorbemerkung (vgl. Analysis I): Sei  $(w_k)_k$  Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann steht

$$(1) \quad \prod_{k=1}^{\infty} w_k \quad (\text{unendliches Produkt})$$

- wie bei unendlichen Summen - zunächst nur für die Folge des Teilprodukts, d.h. die Folge

$$(2) \quad \left( \prod_{k=1}^n w_k \right)_n$$

Die Folge (2) konvergiere gegen ein  $w \in \mathbb{C}$ . Soll man dann (analog zu unendl. Summen) das unendl. Produkt (1) konvergent nennen (und  $w = \prod_{k=1}^{\infty} w_k$  schreiben)?

Doch dann wäre (1) bereits konvergent, wenn nur ein  $w_k = 0$  ist. Außerdem konvergiert z.B. für die Folge  $w_k = \frac{1}{k}$  die Folge (2) gegen 0 also würde  $\prod_{k=1}^{\infty} w_k = 0$  gelten, obwohl alle Faktoren  $w_k \neq 0$  sind.

Def. Das unendl. Produkt (1) heißt konvergent, wenn es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so daß die Folge

$$(3) \quad \left( \prod_{k=m}^n w_k \right)_{n \geq m}$$

gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert konvergiert (Nob. muß dann  $w_k \neq 0$  für alle  $k \geq m$  gelten). Ist (1) in diesem Sinne

konvergent, so konvergiert mit (3) auch die Folge (2); bestimmen wir deren Grenzwert mit  $\prod_{k=1}^{\infty} w_k$  und den von (3) mit  $\prod_{k=m}^{\infty} w_k$ , so gilt

$$(4) \quad \prod_{k=1}^{\infty} w_k = \left( \prod_{k=1}^{m-1} w_k \right) \cdot \prod_{k=m}^{\infty} w_k \quad \text{mit} \quad \prod_{k=m}^{\infty} w_k \neq 0 \quad )$$

Fakt 1: Ist (1) konvergent, so gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k = 0 \iff \exists k \text{ mit } w_k = 0$$

Bew. Dies folgt aus (4).

Fakt 2: Ist (1) konvergent, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$ .

Bew. o.E.  $w_k \neq 0$  für alle  $k$ . Dann  $w_n = \prod_{k=1}^n w_k / \prod_{k=1}^{n-1} w_k$ , und daher  $w_n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wegen Fakt 2 schreibt man (1) meist in der Gestalt

$$(5) \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

mit  $a_k := w_k - 1$ , also  $w_k = 1 + a_k$ . Ist (5) konvergent, so gilt

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Das Produkt (5) bzw. (1) heißt absolut-konvergent, wenn  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |a_k|)$  konvergent ist. Bekanntlich gilt (vgl. z.B. FTI, S. 266):

Fakt 3:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent  $\iff \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  absolut-konvergent

Ist (5) absolut-konvergent, so ist (5) auch konvergent, mehr noch: jedes aus (5) durch Permutation der Faktoren entstehende Produkt ist konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

) und man sieht, daß die linke Seite von (4) unabhängig von der Wahl von  $m$  ist.

Def. Eine zahlenthe. Funktion  $f$ , d.h. eine Fkt.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , heißt multiplikativ, wenn  $f(1) = 1$  und

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2), \text{ falls } \text{ggT}(n_1, n_2) = 1$$

Ist  $f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$  für alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , nebst  $f(1) = 1$ , so heißt  $f$  vollständig multiplikativ.

F1: Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  multiplikativ, und die Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

sei absolut-konvergent für  $\text{Re}(s) > 1$ . Für jedes

$s$  mit  $\text{Re}(s) > 1$  gilt dann

"Erstes-Produkt"

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} f(p^m) p^{-ms} \right),$$

mit absoluter Konvergenz des unendl. Produkts; ist  $f$  sogar vollständig multiplikativ, so gilt

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}}$$

Bew. 1) Jede der unendlichen Summen auf der r. S. von (1) ist absolut-konvergent für  $\text{Re}(s) > 1$ , da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$  das ist. - Sei  $P$  eine bel. endliche Teilmenge von  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{N}(P) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat nur Primteiler aus } P\}$ . Da  $f$  multiplikativ, folgt

endliches Produkt:

$$(*) \quad \prod_{p \in P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = \sum_{n \in \mathbb{N}(P)} \frac{f(n)}{n^s}$$

"Mit wachsendem  $P$  konvergiert die rechte Seite gegen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ . Also konvergiert das unendliche Produkt auf der l. S. von (1), und es gilt (1)."

So in J.-P. Serre, A Course in Arithmetic, S. 69 (und auch in weiteren Büchern). Doch diese Argumentation ist nicht vollständig; für Konvergenz eines unendl. Produkts ist auch zu zeigen (vgl. Vorlesung)!

Reparatur: Seien  $x_0, x \in \mathbb{N}$  mit  $x_0 < x$ . Wählt man  $P = P_{x_0, x} = \{p \in \mathbb{P} \mid x_0 \leq p \leq x\}$  in (\*), so erhält man

$$\prod_{x_0 \leq p \leq x} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}(P_{x_0, x})} \frac{f(n)}{n^s}$$

Für  $x \rightarrow \infty$  geht die rechte Seite gegen

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ hat nur Primteiler} \geq x_0}} \frac{f(n)}{n^s} \quad (\text{Konvergent, da } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ absolut-konv.})$$

Für diesen Grenzwert  $w = w(s, x_0)$  gilt aber

$$|w-1| \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \\ n \text{ hat nur Primteiler} \geq x_0}} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n \geq x_0} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$$

Die rechte Seite geht mit  $x_0 \rightarrow \infty$  gegen 0. Also gibt es ein  $x_0 \in \mathbb{N}$  mit  $w = w(s, x_0) \neq 0$ , und damit ist die Konvergenz des unendl. Produkts in (1) vollständig bewiesen.

Das geht einfacher, wenn man Fakt ③ des Vorles. benutzt:

$$\text{Mit } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = 1 + a_p(s)$$

$$\text{gilt } \sum_{p \in \mathbb{P}} |a_p(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| < \infty, \text{ also ist das Produkt}$$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + a_p(s)) \text{ absolut konvergent und daher auch konvergent.}$$

2) Sei  $f$  total vollständig multiplikativ. Dann hat man  
 $f(p^m) = f(p)^m$  und es folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m) p^{-ms} = \sum_{m=0}^{\infty} (f(p) p^{-s})^m = \frac{1}{1 - f(p) p^{-s}}$$

(Aus der Konvergenz der Reihe folgt  $|f(p) p^{-s}| < 1$ ) □

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  absolut-konvergent auf  $\text{Re}(s) > 1$  ist, kann man

F1 auf die Funktion  $f=1$  (d.h.  $f(n)=1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ )  
 anwenden, die vollständig multiplikativ ist:

F2: Man hat

$$(3) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad \text{auf } \text{Re}(s) > 1$$

$$(4) \quad \zeta(s) \neq 0 \quad \text{für jedes } s \text{ mit } \text{Re}(s) > 1.$$

「Für reelle  $s$  mit  $s > 1$  ist trivialerweise sogar  $\zeta(s) > 0$ 」

Bew. Beide (4) ist klar, denn (für festes  $s$  mit  $\text{Re}(s) > 1$ ) ist  
 jedes der Faktoren  $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0$ ; nach Fakt (3) des Vorles. kann daher  
 die rechte Seite von (3) für kein  $s$  mit  $\text{Re}(s) > 1$  verschwinden. □

Aus (3) und (4) folgt

$$(5) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{für } \text{Re}(s) > 1$$

(wobei das unendl. Produkt sogar absolut-konv. ist)

Hat das Produkt auf der r.S. von (5) das Eulers-Produkt einer  
 Dirichletreihe in einer multiplikativen Funktion  $f$ ?

Nach Formel (1) in F1 suchen wir eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(1) = 1$  und

$$(6) \quad f(p^m) = \begin{cases} -1 & \text{für } m=1 \\ 0 & \text{für } m>1 \end{cases} \quad \text{[für alle } p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}]$$

Offenbar gibt es genau eine multiplikative Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , die das erfüllt, nämlich die Funktion

$$(7) \quad f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=1 \\ 0 & \text{wenn } n \text{ nicht quadratfrei} \\ (-1)^r & \text{wenn } n = \text{Produkt von } r \text{ versch. Primzahlen} \end{cases}$$

Wegen  $|f(n)| \leq 1$  für alle  $n$ , ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$  absolut-konvergent für  $\text{Re}(s) > 1$ , und Formel (1) in F1 liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{auf } \text{Re}(s) > 1$$

Def. Die durch (6) bzw. (7) definierte multiplikative Funktion wird mit  $\mu$  bezeichnet und heißt Möbiussche  $\mu$ -Funktion.

F3: Man hat

$$(8) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{auf } \text{Re}(s) > 1$$

Das Gebiet  $U$  der  $s$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  ist konvex, und  $\zeta$  hat keine Nullstellen in  $U$ . Wie man in FT I lernt, gibt es daher einen (holomorphen) Zweig von  $\log \zeta$  auf  $U$ , d.h. eine holomorphe

Fkt.  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(9) \quad e^{g(s)} = \zeta(s) \text{ für alle } s \in U$$

und ein solches  $g$  ist bis auf eine additive Konstante  $c$  aus  $2\pi i \mathbb{Z}$  eindeutig bestimmt. [vgl. FT I, S. 101f.]

Da  $\zeta(s) > 0$  für reelles  $s > 1$ , kann man noch verlangen, daß  $g(s)$  reell für reelles  $s > 1$  ist, wodurch  $g$  dann eindeutig bestimmt ist und so die Bezeichnung

$$g = \log \zeta$$

rechtfertigt. (Beachte aber, daß man  $\log \zeta$  nicht etwa als Hintereinanderschaltung der Funktion  $\zeta$  und einer Funktion  $\log$  ansehen darf.)

Um nun dieses  $g = \log \zeta$  zu verschaffen, brauchen wir aber gar nicht auf den obigen Satz der FT I zu verweisen:

Wir betrachten einfach die Funktion

$$(10) \quad g(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}$$

wobei die rechte Seite nach §2 eine holomorphe Funktion auf  $\operatorname{Re}(s) > 1$  vermittelt (Klar? genaue Erläuterung s. w. u.)

Aus Stetigkeitsgründen ist dann

$$(11) \quad e^{g(s)} = e^{\sum_p \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}} \right)} = \prod_p e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}},$$

wobei klar ist, daß <sup>das</sup> unendliche Produkt wirklich konvergiert ist. Da  $g$  in (10) auf  $\mathbb{R}$  nur reelle Werte annimmt, bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß die r.S. in (11) mit  $\zeta(s)$  übereinstimmt:

Für  $|z| < 1$  ist  $1-z$  keine reelle Zahl  $\leq 0$ , also ist

$\text{Log}(1-z)$  definiert mit  $\text{Log}$  als dem Hauptwert des Logarithmus

und es gilt

$$(12) \quad \text{Log}(1-z) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$$

[Bew. Für die Ableitung gilt  $-\frac{1}{1-z} = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , also gilt (12)

bis auf eine Konstante  $c$ . Doch für  $z=0$  stimmen beide Seiten von (12) überein, also ist  $c=0$ .]

Nach (12) ist nun  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}} = -\text{Log}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ , also

$$e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}} = e^{-\text{Log}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = \frac{1}{e^{\text{Log}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Insgesamt ist nach (11) also

$$e^{g(s)} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \stackrel{(3)}{=} \zeta(s).$$

P.S.1 Um die rechte Seite von (10) wirklich korrekt zu erfassen, betrachte die Dirichletreihe

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{wenn } n = p^m \text{ mit } p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Reihe ist offenbar absolut-konv. auf  $\text{Re}(s) > 1$ . Wir können also beliebig umordnen und erhalten



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}}$$

Nach §2 vermittelt die Reihe also in der Tat eine holomorphe Funktion auf  $\text{Re}(s) > 1$ .

P.S.2 Es ist  $\log(p^m) = m \log p$ , so daß  $a_n$  in (13)

im Falle  $n = p^m$  durch

$$a_n = \frac{\log p}{\log n}$$

gekennzeichnet ist. Definiert man daher die Funktion  $\Lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$(14) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{wenn } n \text{ eine Primpotenz } p^m > 1 \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so erhält man für  $\log \zeta = g$  mit  $g$  wie in (10) die Darstellung

$$(\log \zeta)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s} \quad \text{für } \text{Re}(s) > 1$$

$\Lambda$  heißt die von Mangoldt-Funktion (von Mangoldt  $\approx 1895$ ).

Sie wurde aber bereits von Chebyshev ( $\approx 1852$ ) bei seinen wegweisenden Vorarbeiten zum Primzahlsatz betrachtet.

F4: Mit den obigen Bezeichnungen ist

$$(15) \quad \log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s} \quad \text{für } \text{Re}(s) > 1$$

der holomorphen Zweig von  $\log \zeta$  auf  $\text{Re}(s) > 1$ , der für jedes reelle  $s > 1$  den reellen Wert  $\log \zeta(s)$  besitzt. Es folgt (vgl. (9) und §2, Kor. 1 in Satz 1,

$$(16) \quad (\log \zeta)'(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{für } \text{Re}(s) > 1$$

(wobei auch die letztgenannte Reihe absolut konvergiert ist, vgl. S. 15a)

Bemerkung: Die auf den ersten Blick vielleicht etwas merkwürdig erscheinende Funktion  $\Delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  kommt also ganz natürlich aus dem Spiel, genau wie die Funktion  $\mu$ , deren Definition ja zuerst auch etwas seltsam anmutet. Im übrigen gibt es eine bedeutsame Relation zwischen  $\Delta$  und  $\mu$ , nämlich

$$\Delta = \mu * \log$$

Zur Erklärung: Sei  $R$  die Menge aller zahlentheoretischen Funktionen, d. h. der Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Offensichtlich ist  $(R, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring mit Einselement  $1$  (def. durch  $1(n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ). Man kann aber auf  $R$  eine andere Multiplikation  $*$  definieren und zwar durch

$$(17) \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{N} \\ kl = n}} f(k) g(l)$$

Offensichtlich ist  $(R, +, *)$  ein kommutativer Ring mit Einselement  $\varepsilon$ , definiert durch

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

$\varepsilon$  ist also die charakteristische Funktion der Teilmenge  $\{1\}$  von  $\mathbb{N}$ .

In der Tat ist  $(f * \varepsilon)(n) = \sum_{d|n} f(d) \varepsilon\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \varepsilon(1) = f(n)$ .

Die aus der "elementaren Zahlentheorie" geläufige Definition (17) können wir hier wie folgt motivieren: