$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{p \in \mathbb{P}}{}' \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m p^{ms}}$$

Nach §2 vermittelt die Reihe also in der Tat eine holomorphe Funktion auf $Re(s) > 1$.

<u>P.S.2</u> Es ist $\log(p^m) = m \log p$, so daß a_n in (13) im Falle $n = p^m > 1$ durch

$$a_n = \frac{\log p}{\log n}$$

gegeben ist. Definiert man daher die Funktion $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ durch

insb. $\Lambda(1) = 0$

(14) $$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \;, & \text{wenn } n \text{ eine Primpotenz } p^m > 1 \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so erhält man für $\log \zeta = g$ mit g wie in (10) die Darstellung

(15) $$(\log \zeta)(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s} \quad \text{für } Re(s) > 1$$

Λ heißt die <u>von Mangoldt-Funktion</u> (von Mangoldt ≈ 1895).
Sie wurde aber bereits von Čebyšev (≈ 1852) bei seinen wegweisenden Vorarbeiten zum Primzahlsatz betrachtet.

<u>F4:</u> Mit den obigen Bezeichnungen ist

(15) $$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s} \quad \text{für } Re(s) > 1$$

der holomorphe Zweig von $\log \zeta$ auf $Re(s) > 1$, der für jedes reelle $s > 1$ den reellen Wert $\log(\zeta(s))$ besitzt. Es folgt (vgl. (9) und §2, Kor. 1 zu Satz 1)

(16) $$(\log \zeta)'(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{für } Re(s) > 1$$

(wobei auch die letztgenannte Reihe <u>absolut</u> konvergent ist, da konvergent in jedem $\sigma > 1$ und $\Lambda(n) \geq 0$ für alle n).