F5: Sei $R = (R, +, *)$ der Ring der zahlenth. Funktionen. Seien $f, g, h \in R$ und es gebe ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

(18) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \quad \text{auf } Re(s) > \alpha,$$

wobei die Reihen auf der rechten Seite sogar absolut-konvergent auf $Re(s) > \alpha$ seien. Dann gilt

(19) $$h = f * g$$

Umgekehrt: Aus (19) folgt (18) sowie die absolute-Konvergenz der Reihe auf der linken Seite von (18) auf $Re(s) > \alpha$.

Bew. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihen zu f und g folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(l)}{l^s} = \sum_{k,l} \frac{f(k)g(l)}{(kl)^s}$$

mit absoluter Konvergenz der Doppelreihe, die wir daher beliebig umordnen können. Durch Zusammenfassen der k, l mit gleichem Produkt n erhalten wir die auf $Re(s) > \alpha$ absolut-konvergierende Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{kl=n} f(k)g(l) \Big) \frac{1}{n^s}$$

Aus dem Identitätssatz für Dirichletreihen [vgl. §2, Nr. 4 u. Satz 1] folgt somit

$$h(n) = \sum_{kl=n} f(k)g(l) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h. (19). Damit ist alles bewiesen. $\square$

F6: Es gelten z.B. folgende Relationen:

(20) $\mu * 1 = \varepsilon$, d.h. $\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=1 \\ 0 & \text{für } n\neq 1 \end{cases}$

(21) $\Lambda * 1 = \log$

(22) $\Lambda = \mu * \log$ (23) $\mu * \Lambda = -\mu\cdot\log$

Bew.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \overset{F3}{=} \frac{1}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon(n)}{n^s}$$

(mit abs. Konv. auf $\mathrm{Re}(s)>1$)

$\overset{F5}{\Longrightarrow}$ (20). Analog:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \overset{F4}{=} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s) = -\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$$

$\overset{F5}{\Longrightarrow}$ (21).

Direkte Verifikation von (21): $(\Lambda * 1)(n) = \sum_{d|n}\Lambda(d) =$

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}, m\in\mathbb{N} \\ \text{mit } p^m|n}}\log p = \sum_{p\in\mathbb{P}} w_p(n)\log p = \log\Big(\prod_p p^{w_p(n)}\Big) = \log n.$$

⌈direkter Bew. von (20) als ÜA⌋

(22): $(\Lambda * 1) * \mu \overset{(21)}{=} \log * \mu = \mu * \log$

$\quad \| $

$\Lambda * (1 * \mu) \overset{(20)}{=} \Lambda * \varepsilon = \Lambda$, da ε Einselement von R.

(23): $-\sum \frac{\mu(n)\log n}{n^s} = \left(\frac{1}{\zeta}\right)'(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)^2} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{1}{\zeta(s)} \overset{(16),(8)}{=}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}, \Rightarrow (23).$$

⌈Direkter Bew. von (23) als ÜA⌋

Weiteres Beispiel: Nach F5 ist

$$\zeta(s)^2 = \zeta(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1*1)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n^s}$$ mit der

Funktion $\sigma_0 = 1 * 1$ (wobei die Dirichletreihe auf der r.S. absolut-konv. auf $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist). Nach Definition ist

$$\sigma_0(n) = (1*1)(n) = \sum_{d|n}' 1(d)1(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n}' 1,$$ also ist

$\sigma_0(n) =$ Anzahl der nat. Teiler d von n.

Wegen $\zeta(s) = \zeta(s)^2 \cdot \frac{1}{\zeta(s)}$ folgt (aus F5)

$$1 = \sigma_0 * \mu$$

F7: Es gelten

(24) $\mu * \sigma_0 = 1$

(25) $\Lambda = 1 + \mu * (\log - \sigma_0)$

(26) $\Lambda = 1 + c\varepsilon + \mu * (\log - \sigma_0 - c)$ für jedes $c \in \mathbb{C}$.

Bew. (24) oben schon bewiesen. (25) folgt aus (26) mit $c = 0$.

(26): $\mu * (\log - \sigma_0 - c) = \mu * \log - \mu * \sigma_0 - \mu * c \overset{(22),(24)}{=}$
$\Lambda - 1 - c(\mu * 1) \overset{(20)}{=} \Lambda - 1 - c\varepsilon$, $\Rightarrow$ Beh.

Bem. Man verifiziert leicht:

Sind $f, g \in R$ multiplikativ, so auch $f * g$.

Bsp. $\sigma_0 = 1 * 1$ ist multiplikativ, also

(27) $$\sigma_0(p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}) = (a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_r+1)$$

Beachte: 1 ist vollständig multiplikativ, doch $\sigma_0 = 1*1$ ist nicht vollständig multiplikativ, denn

$$\sigma_0(p)\sigma_0(p) = 2\cdot 2 \neq \sigma_0(p^2) = 3$$

<u>Verallgemeinerung von σ_0:</u>

1) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} \qquad (\text{auf } Re(s) > 1)$$

mit $\tau_k := \underbrace{1*1*\cdots*1}_{k \text{ Faktoren}}$, wobei

$\tau_k(n) =$ Anzahl der Darstellungen von n als Produkt von k Faktoren aus $\mathbb{N}$ (bis auf Reihenfolge)

Speziell: $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = \sigma_0$. Es gilt

$$\tau_k(p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}) = \binom{a_1+k-1}{k-1}\cdot\binom{a_2+k-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\binom{a_r+k-1}{k-1}$$

2) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \qquad (\text{auf } Re(s) > Re(\alpha)+1,\ 1)$$

mit

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$$

Bew. als ÜA.

<u>F4'</u>: Es gibt eine auf $Re(s) > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion h, so daß

$$\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + h(s) \quad \text{für } Re(s) > 1$$

<u>Bew.</u> Nach F4 ist auf $Re(s) > 1$

$$\log \zeta(s) - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}$$

Wir betrachten nun die Dirichletreihe auf der rechten Seite und behaupten, daß sie für $Re(s) > \frac{1}{2}$ absolut-konvergent ist, also eine holomorphe Funktion h auf $Re(s) > \frac{1}{2}$ vermittelt.

Für bel. s mit $\sigma = Re(s) > \frac{1}{2}$ hat man

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=2} \left| \frac{1}{m p^{ms}} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^{m\sigma}} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{\sigma}}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{1/2}}} \overset{*)}{\leq} 2 \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} < \infty .$$

*) denn $\quad \dfrac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{p}}} \leq \dfrac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2 + \sqrt{2} \leq 4$

<u>Kor.</u> Es gilt

$$\log \zeta(s) \sim \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \quad \text{für } s \searrow 1$$

in dem Sinne, daß der Quotient der genannten Funktionen für $s \to 1$ im reellen Bereich $s > 1$ gegen 1 konvergiert.

<u>Bew.</u> Beachte $\log \zeta(s) \to +\infty$ für $s \searrow 1$ [bzw. $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \to +\infty$ für $s \searrow 1$] (wieso? Vgl. §1)

§4 Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf $Re(s)>0$

<u>F1:</u> Auf $Re(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = f(s)$$

mit einer <u>auf $Re(s)>0$ holomorphen</u> Funktion f.

<u>Bew.</u> Für jedes s mit $Re(s)>1$ gilt

$$(1) \qquad \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty t^{-s}\,dt\,,$$

denn $\frac{1}{1-s}t^{-s+1}$ ist eine Stammfkt. von t^{-s}, so daß für jedes $x \geq 1$ $\int_1^x t^{-s} = \frac{1}{1-s}x^{-s+1} - \frac{1}{1-s}$ gilt, und für $x \to +\infty$ geht die r. S. wegen $Re(s)>1$ gegen $\frac{1}{s-1}$. ⌈Wegen $|t^{-s}| = t^{-\sigma}$ ist das uneigentliche Integral sogar absolut-konvergent.⌋

Wegen $\int_1^\infty t^{-s}dt = \sum_{n=1}^\infty \left(\int_n^{n+1} t^{-s}dt\right)$ folgt nun

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} t^{-s}dt\right) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})\,dt,$$

alles für $Re(s)>1$.

Für bel. $s \in \mathbb{C}$ definiere nun $f_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})\,dt$. Jedes f_n ist holomorph auf $\mathbb{C}$, insb. auf $Re(s)>0$.

<u>Beh.</u> Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(s)$ ist auf $Re(s)>0$ <u>kompakt konvergent</u> (sogar <u>normal konvergent</u>) gegen eine Fkt. $f(s)$. Nach Weierstraß (vgl. z.B. FT I, S. 176) ist daher f <u>holomorph</u> auf $Re(s)>0$.

Mat hat nämlich

$$|f_n(s)| \leq \int_n^{n+1} |n^{-s} - t^{-s}|\, dt \leq \max_{n \leq t \leq n+1} |n^{-s} - t^{-s}|$$

$$n^{-s} - t^{-s} = \int_n^t s x^{-s-1}\, dx \text{ , also } |n^{-s} - t^{-s}| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$$

Sei nun K ein bel. Kompaktum in $Re(s) > 0$. Dann gibt es Konstanten $c = c(K) > 0$ und $\sigma_0 = \sigma_0(K) > 0$ mit

$$|s| \leq c, \quad |\sigma| \geq \sigma_0 \quad \text{für alle } s \in K \text{ (mit } \sigma = Re(s))$$

Somit ist

$$|f_n(s)| \leq \frac{c}{n^{\sigma_0 + 1}} \qquad \text{für alle } s \in K$$

Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0+1}} < \infty$ ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ normal konvergent auf $Re(s) > 0$.

<u>Korollar</u>: Die auf $Re(s) > 1$ definierte und dort holomorphe Funktion ζ läßt sich eindeutig[*)] zu einer meromorphen Funktion auf $Re(s) > 0$ fortsetzen, die wir ebenfalls mit ζ bezeichnen. Der einzige Pol dieser Funktion ist $s = 1$. Er ist einfacher Pol mit dem Residuum 1.

<u>Bew.</u> Die Fkt. $\frac{1}{s-1} + f(s)$ ist eine auf $Re(s) > 0$ meromorphe Funktion g, die auf $Re(s) > 1$ mit ζ übereinstimmt; $s = 1$ ist ihr einziger Pol, und es ist

$$\mathrm{ord}_1\, g = -1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Res}_1\, g = 1.$$

---

*) eindeutig wegen Identitätssatz