<u>F2</u>: Auf $Re(s)>0$ gilt

$$(1) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt$$

(wobei das uneigentliche Integral offenbar absolut-konvergent ist für $Re(s)>0$, und zwar gleichmäßig auf jedem Kompaktum des Gebietes $Re(s)>0$)).

<u>Bew.</u> 1) Für $s\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$ setze $g_n(s) = \int_1^n \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt$. Wegen

$$g_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{t-k}{t^{s+1}}\,dt$$ ist jedes g_n holomorph auf $\mathbb{C}$.

Auf $Re(s)>0$ konvergiert die Folge der Funktionen g_n aber kompakt-gleichmäßig gegen die Funktion $g(s) = \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt$, also ist diese Funktion <u>holomorph</u> auf $Re(s)>0$.

2) Das Abelsche Lemma' mit $a_n = 1$ und $g(t) = t^{-s}$ ergibt

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = [x]x^{-s} + s\int_1^x [t]\,t^{-s-1}\,dt = \frac{[x]}{x^s} - s\int_1^x\frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + s\int_1^x t^{-s}\,dt$$

$$= \frac{[x]}{x^s} - s\int_1^x\frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt + \frac{s}{1-s}\,\frac{1}{x^{s-1}} - \frac{s}{1-s}$$

Auf $Re(s)>1$ liefert $x\to\infty$ nun

$$(2) \qquad -s\int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt = \zeta(s) + \frac{s}{1-s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} - 1$$

Auf $Re(s)>0$ ist aber nach Korollar zu F1 die Funktion auf der rechten Seite holomorph, und nach 1) gilt das auch für die linke Seite. Aus dem Identitätssatz folgt die Behauptung von F2.

<u>Korollar</u>: Für jedes reelle $s>0$ ist $\zeta(s)\neq 0$.

<u>Bew.</u> Zunächst hat man für bel. s mit $Re(s)>0$ nach (2) die Äquivalenz:

$$(*) \qquad \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^{s+1}}\,dt \iff \zeta(s)=0$$

Annahme: $\zeta(s)=0$ für ein $s>0$. Für $s>0$ ist das Integral >0, also folgt $s-1>0$, d.h. $s>1$. Doch dann ist $\zeta(s)>0$. W!

Eine Reihe wegweisender Bemerkungen:

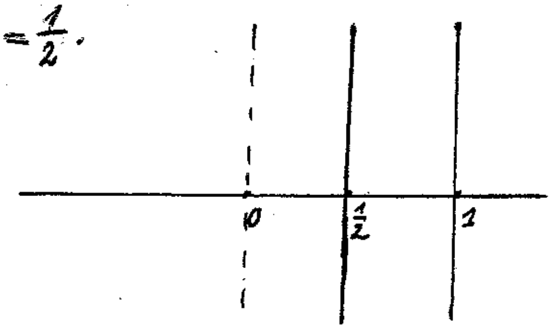
Bem. 1: Nach §3, F3 gilt

(3) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \qquad \text{auf } Re(s) > 1$$

Nach dem Korollar zu F1 ist nun auch $\frac{1}{\zeta(s)}$ eine auf $Re(s) > 0$ meromorphe Funktion. Ihre Singularitäten (Pole) sind die Nullstellen von ζ in $Re(s) > 0$. (Keine von diesen liegt im Gebiet $Re(s) > 1$; nach Kor. zu F2 liegt auch keine im Intervall $0 < s \le 1$).

Bem. 2*: Man kann zeigen: ζ hat unendlich viele Nullstellen in $Re(s) > 0$.
(Natürlich können es nur abzählbar viele sein.)

Riemannsche Vermutung (RV): Alle diese Nullstellen liegen auf der Geraden $Re(s) = \frac{1}{2}$.



Bem. 3*: Wie schon erwähnt, läßt sich ζ zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen (mit einzigem Pol in $s = 1$). Man kann zeigen: Im Bereich $Re(s) \le 0$ hat ζ genau die Nullstellen

$$-2, -4, -6, \ldots$$

d.h. die Punkte $s = -2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Diese heißen die trivialen Nullstellen von ζ.[1]

---

1) Wenn genügend Zeit verbleibt, werden wir in der Vorlesung auch die in Bem. 2* und Bem. 3* ausgesprochenen Tatsachen beweisen.

Bem. 4: In $s=1$ hat ζ einen einfachen Pol, also hat $\frac{1}{\zeta}$ in $s=1$ eine einfache Nullstelle.

Bem. 5: Mit Blick auf (3) legt Bem. 4 folgende Frage nahe: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ konvergent in $s=1$? Wenn ja, so folgt

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

Denn $\frac{1}{\zeta(s)}$ ist nach Bem. 4 stetig in $s=1$ und hat dort den Wert 0, also folgt (4) mit Blick auf (3) aus dem Abelschen Grenzwertsatz für Dirichletreihen (§2, Kor. 3 zu Satz 1).

Bem. 6: Wir werden später zeigen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ in $s=1$ konvergiert und damit (4) gilt. Hat man (4), so läßt sich daraus relativ einfach der Primzahlsatz folgern. (Landau hat sogar gezeigt, daß (4) äquivalent mit dem Primzahlsatz ist).

Bem. 7: Ich weiß nicht, welchen genauen Wert die Konvergenzabszisse ρ von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ besitzt. Ist $\rho < 1$?

Bem. 8: Nachfolgend werden wir nun zeigen, daß ζ auf der Geraden $Re(s) = 1$ keine Nullstelle hat, also $\frac{1}{\zeta}$ in jedem Punkt dieser Geraden analytisch (holomorph) ist.

Diese Tatsache ist zwar nur ein kleiner Teil der Riemannschen Vermutung (RV). Aber diesen Teil von (RV) können wir beweisen, und er wird die Grundlage für unseren Beweis von Bem. 6 bilden und damit für unseren Beweis des Primzahlsatzes. (Umgekehrt läßt er sich auch relativ leicht aus dem Primzahlsatz folgern.)

Satz 1 (Hadamard, de la Vallée Poussin):

Auf der Geraden $Re(s) = 1$ hat ζ keine Nullstelle:

$$\zeta(1+it) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Bew. (Hadamard 1896): Annahme: $\zeta(1+it_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

Dann $t_0 \neq 0$ (denn $\zeta(1) = \infty$, vgl. Kor. zu F1). Betrachte die auf $Re(s) > 0$ meromorphe Funktion

(5) $$h(s) = \zeta(s)^3 \zeta(s+it_0)^4 \zeta(s+2it_0) \quad {}^{*)}$$

Aufgrund unserer Annahme hat $\zeta(s+it_0)$ in $s=1$ eine Nullstelle. Da $\zeta(s+2it_0)$ in $s=1$ wegen $t_0 \neq 0$ jedenfalls keinen Pol hat, folgt für die Ordnung von h in $s=1$ somit

$$\mathrm{ord}_1(h) \geq -3+4+0 = 1,$$

also hat h in $s=1$ eine <u>Nullstelle</u> (und ist insb. analytisch in $s=1$). Da h im Gebiet $Re(s) > 1$ nirgends verschwindet (vgl. §3, F2) haben wir dort die Funktion $\log|h(s)|$, und wegen $h(1)=0$ gilt speziell im reellen Bereich $\sigma > 1$

(6) $$\log|h(\sigma)| \to -\infty \quad \text{für } \sigma \to 1$$

Auf dem Gebiet $Re(s) > 1$ haben wir (nach §3, F4) die holomorphe Funktion

$$g(s) = (\log\zeta)(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}$$

Wegen $\zeta(s) = e^{g(s)}$ gilt $|\zeta(s)| = e^{Re(g(s))}$, also

$$\log|\zeta(s)| = Re(g(s)) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Re(p^{-ms}) \quad \text{auf } Re(s) > 1$$

---

*) $\zeta(s)$ ist eine auf $Re(s) > 0$ meromorphe Funktion. Wegen $Re(s) = Re(s+it_0) = Re(s+2it_0)$ gilt gleiches auch für die Funktionen $\zeta(s+it_0)$ und $\zeta(s+2it_0)$.

Für $s = \sigma + it$ mit $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $t = \mathrm{Im}(s)$ ist

$$p^{-ms} = e^{-(\log p)ms} = e^{-(\log p)(m\sigma + imt)}, \text{ also}$$

$$\mathrm{Re}(p^{-ms}) = e^{-(\log p)m\sigma} \cos(mt\log p) = p^{-m\sigma} \cos(mt\log p),$$

und somit

$$(7) \quad \log|\zeta(s)| = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt\log p)}{m\,p^{m\sigma}}$$

Für alle reellen $\sigma > 1$ ist nach (5) jedenfalls

$$\log|h(\sigma)| = 3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it_0)| + \log|\zeta(\sigma+2it_0)|,$$

und mit (7) folgt jetzt

$$\log|h(\sigma)| = \sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{\sigma}} \left(3 + 4\cos(mt_0\log p) + \cos(2mt_0\log p)\right) \overset{!}{\geq} 0,$$

denn für bel. $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 3 + 4\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1$
$= 2(1+\cos\varphi)^2 \geq 0$.

Es ist also $\log|h(\sigma)| \geq 0$ für alle $\sigma > 1$. Doch dies steht im Widerspruch zu (6). $\square$

Bem. Nach (*) auf S. 33 sind die Nullstellen von $\zeta(s)$ in $Re(s)>0$ durch folgende Gleichung gekennzeichnet:

$$(8) \qquad \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$$

Ob diese Kennzeichnung zu irgendetwas taugt, sei dahingestellt. Danach ist jedenfalls ein s der Gestalt $s = 1+it_0$ mit $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ genau dann eine Nullstelle von ζ, wenn t_0 der Gleichung

$$(9) \qquad \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^2}\, x^{-it_0}\,dx = \frac{1}{it_0}$$

genügt, d.h. die beiden folgenden "reellen Gleichungen" bestehen:

$$(10) \qquad \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^2}\cos(t_0\log x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^2}\sin(t_0\log x)\,dx = \frac{1}{t_0}$$

Der Satz von Hadamard und de la Vallée Poussin besagt also gerade, daß es kein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt, das die Gleichungen (10) erfüllt. Kann man dies vielleicht auch durch genauere Untersuchung des in (10) auftretenden Integrals nachweisen?