§5 Kleines Interludium

Def. Sei A eine gegebene Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$ setze

$$A(x) := \text{Anzahl der } n \in A \text{ mit } n \leq x$$

z.B. ist $\mathbb{P}(x) =$ Anzahl der Primzahlen $\leq x$, also

$$\mathbb{P}(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ (p \in \mathbb{P})}} 1 =: \pi(x)$$

Konvergiert $\frac{A(x)}{x}$ für $x \to \infty$, so sagt man, A besitze die (natürliche) Dichte

$$d(A) = \lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x}$$

Allgemeiner: Für $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ sagen wir, A besitze in B die (natürliche) Dichte c, wenn $\frac{A(x)}{B(x)}$ für $x \to \infty$ gegen c konvergiert. Wir setzen $d_B(A) = c$.

Natürlich ist es schwierig, für vorgelegte $A \subseteq B$ zu entscheiden, ob $d_B(A)$ existiert. In der Regel ist es leichter, zu entscheiden, ob

$$\delta_B(A) := \lim_{s \downarrow 1} \frac{\sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}}{\sum_{n \in B} \frac{1}{n^s}} \qquad \text{"Dirichlet-Dichte von } A \text{ in } B\text{"}$$

existiert. Wieder setzen wir $\delta(A) = \delta_{\mathbb{N}}(A)$. – Jedenfalls gilt

F1: Für $B \subseteq \mathbb{N}$ gelte $\sum_{n\in B} \frac{1}{n} = \infty$, und es sei $A \subseteq B$.

Existiert nun $d_B(A)$, so auch $\delta_B(A)$ und es ist $d_B(A) = \delta_B(A)$.*)

Bew. siehe w.u.

Bsp. 1: $\delta(\mathbb{P}) = 0$. (Existiert also $d(\mathbb{P})$, so ist $d(\mathbb{P}) = 0$.)

Nach §3, Kor. zu F4' gilt

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log \zeta(s) \quad \text{für} \quad s \searrow 1$$

Daraus folgt wegen

$$\frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}} = \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\zeta(s)} = \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\log\zeta(s)} \; \frac{\log\zeta(s)}{\zeta(s)}$$

die Behauptung, denn $\zeta(s) \to \infty$ für $s \searrow 1$ und $\frac{\log x}{x} \to 0$ für $x \to \infty$.

Bsp. 2: $d(\mathbb{P}) = 0$.

Bew. Zu zeigen ist $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ für $x \to \infty$. Wie man in der elem. Zahlentheorie leicht zeigt**), gibt es ein $c > 0$ mit $\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x}$ für alle $x > 1$. Es folgt $\frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{c}{\log x}$ für $x > 1$, und damit die Beh.

*) Für $B = \mathbb{N}$ bzw. $B = \mathbb{P}$ geht das auf Dirichlet zurück.

**) und im Anhang zu §5 wiederholt wird.

Bsp. 3: Für die Menge $A = \mathbb{N}_{qf}$ der quadratfreien nat. Zahlen gilt

$$\delta(\mathbb{N}_{qf}) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

(Existiert auch $d(\mathbb{N}_{qf})$, so folgt also $d(\mathbb{N}_{qf}) = \frac{1}{\zeta(2)}$; denn wegen $\sum'_{n\in\mathbb{N}_{qf}} \frac{1}{n} \geq \sum'_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$ ist die Vor. von F1 erfüllt.)

Bew. Mit $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, def. durch $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ qu.-frei} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

also der multiplikativen Funktion $f = |\mu|$, liefert §3, F1:

$$\sum'_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum'^{\infty}_{n=1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p (1+p^{-s}) = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)},$$

also

$$\frac{\sum'_{n\in A} \frac{1}{n^s}}{\sum'_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}} = \frac{1}{\zeta(2s)} \xrightarrow{s\searrow 1} \frac{1}{\zeta(2)}$$

Satz 1: Die Menge $A = \mathbb{N}_{qf}$ der quadratfreien nat. Zahlen besitzt die natürliche Dichte $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. Schärfer gilt

(1) $\quad \left| A(x) - \frac{6}{\pi^2} x \right| < 3x^{\frac{1}{2}}$ für alle $x \geq 1$

Bew. Definiere $g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ durch $g(n) = \begin{cases} \mu(\sqrt{n}) & \text{wenn } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Offenbar ist g multiplikativ. Wir behaupten

(2) $\quad g = \mu * |\mu|$

Da auch $\mu * |\mu|$ multiplikativ ist, genügt es zu zeigen, daß beide Funktionen auf Primpotenzen übereinstimmen.

$$(\mu * |\mu|)(p) = \mu(1)|\mu(p)| + \mu(p)|\mu(1)| = 1 - 1 = 0 = g(p)$$

$$(\mu * |\mu|)(p^2) = \mu(1)\underbrace{|\mu(p^2)|}_{0} + \underbrace{\mu(p)}_{-1}\underbrace{|\mu(p)|}_{1} + \underbrace{\mu(p^2)}_{0}|\mu(1)| = -1 = g(p^2)$$

Für $m \geq 3$ aus $\mathbb{N}$ ist

$$(\mu * |\mu|)(p^m) = 0 = g(p^m).$$

Damit ist (2) bewiesen. Es folgt $1 * g = (1*\mu)*|\mu| = \varepsilon * |\mu| = |\mu|$, also

$$(3) \qquad 1 * g = |\mu|$$

Nach dieser Vorbemerkung ist nun für $x \geq 1$

$$A(x) = \sum_{n \leq x} |\mu(n)| \overset{(3)}{=} \sum_{n\leq x} (1*g)(n) = \sum_{n \leq x}\Big(\sum_{d|n} g(d)\Big) =$$

$$\sum_{m \leq x} g(m)\left[\frac{x}{m}\right] \overset{\text{Def. von } g}{=} \sum_{\substack{n^2 \leq x \\ \text{d.h. } n \leq \sqrt{x}}} \left[\frac{x}{n^2}\right]\mu(n) =$$

$$\sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{x}{n^2}\mu(n) + \sum_{n \leq \sqrt{x}}\left(\left[\frac{x}{n^2}\right] - \frac{x}{n^2}\right)\mu(n) = \alpha + \beta$$

mit

$$\alpha = x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} \quad \text{und} \quad \beta \leq \sqrt{x}$$

Weiter ist

$$\alpha = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - x \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} = \alpha_1 + \alpha_2$$

mit

$$\alpha_1 = x \frac{1}{\zeta(2)} \quad \text{und - wegen} \quad \frac{1}{n^2} < \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ -}^{*)}$$

$$|\alpha_2| \leq x \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{1}{n^2} < x \sum_{n > \sqrt{x}} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2} < x \int_{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{x} + 1 \quad \left(\text{denn } (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}) = x + \tfrac{1}{2}\sqrt{x} - \tfrac{1}{2} \geq x \text{ für } x \geq 1\right)$$

Es folgt $\left|A(x) - \frac{x}{\zeta(2)}\right| = |\alpha_2 + \beta| < \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} \leq 3\sqrt{x}$, d.h. (1).

□

*) $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$

Beweis von F1: Setze $c = d_B(A)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $T > 0$ mit

$$\left|\frac{A(t)}{B(t)} - c\right| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq T \text{, also}$$

$$(4) \qquad |A(t) - c\,B(t)| \leq \varepsilon\, B(t) \text{ für alle } t \geq T$$

Sei a die charakt. Fkt. von A, also $a(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in A \\ 0 & \text{für } n \notin A \end{cases}$

Dann

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\leq x} \frac{a(n)}{n^s} \overset{\text{Abel}}{=} \underbrace{A(x)x^{-s}}_{\leq x x^{-s} = \frac{1}{x^{s-1}}} + s\int_1^x A(t)t^{-s-1}\,dt$$

Für $x \to \infty$ erhält man $(s>1)$

$$f(s) := \sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = s\int_1^\infty A(t)\frac{dt}{t^{s+1}} .$$ Entsprechend ist

$$g(s) := \sum_{n\in B} \frac{1}{n^s} = s\int_1^\infty B(t)\frac{dt}{t^{s+1}} .$$ Somit

$$f(s) - c\,g(s) = s\int_1^\infty (A(t) - cB(t))\frac{dt}{t^{s+1}} = s\int_1^T \ldots + s\int_T^\infty \ldots$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2$$

Für $1 < s \leq 2$ ist $|\alpha_1| \leq \underbrace{2\int_1^T |A(t) - cB(t)|\frac{dt}{t^2}}_{\text{unabh. von } s} =: C_T$

und

$$|\alpha_2| \overset{(4)}{\leq} s\varepsilon \int_T^\infty \frac{B(t)}{t^{s+1}}\,dt \leq \varepsilon s\int_1^\infty \frac{B(t)}{t^{s+1}}\,dt = \varepsilon g(s)$$

insgesamt ist daher $|f(s) - cg(s)| \leq C_T + \varepsilon\, g(s)$, also

$$\left|\frac{f(s)}{g(s)} - c\right| \leq \frac{C_T}{g(s)} + \varepsilon \quad \text{für } 1 < s \leq 2$$

Doch $g(s) \to \infty$ für $s \downarrow 1$ (da nach Vor. $\sum_{n\in B}\frac{1}{n} = \infty$, und g monoton). Also strebt die rechte Seite für $s \downarrow 1$ gegen ε. Es folgt die Behauptung.

Bem. 1: Sei $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $A = \{n^4 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $B(x) = [\sqrt[2]{x}]$ und $A(x) = [\sqrt[4]{x}]$. Hieraus folgt offenbar

$$d_B(A) = 0.$$

Andererseits konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4s}} / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}$ für $s \searrow 1$ gegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, und daher gilt

$$\delta_B(A) \neq 0 \quad \left(\text{genauer } \delta_B(A) = \frac{\pi^4/90}{\pi^2/6} = \frac{\pi^2}{15}\right)$$

Ist das ein Widerspruch zu F1? Nein, die Voraussetzung $\sum_{n \in B} \frac{1}{n} = \infty$ ist nicht erfüllt.

Bem. 2: Ist für $A \subseteq \mathbb{N}$ die Bedingung

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < \infty$$

erfüllt, so gilt offenbar $\delta(A) = 0$. Es folgt aber auch $d(A) = 0$.

Bew. Sei $\varepsilon > 0$ geg. Nach Vor. gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n > N}} \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Nun ist

$$\frac{A(x)}{x} = \frac{A(N)}{x} + \frac{1}{x}\Big(\sum_{\substack{n \in A \\ N < n \leq x}} 1\Big) \leq \frac{A(N)}{x} + \sum_{\substack{n \in A \\ N < n \leq x}} \frac{1}{n},$$

also

$$\frac{A(x)}{x} \leq \frac{A(N)}{x} + \varepsilon$$

Für $x \to \infty$ geht die rechte Seite gegen ε. Damit ist $\frac{A(x)}{x} \leq 2\varepsilon$ für alle hinreichend großen x. Es folgt die Behauptung.

<u>Bem. 3</u>: (a) Für die Dirichlet-Dichte einer Teilmenge <u>A in $\mathbb{N}$</u> hat man folgende äquivalente Definition:

$$\delta(A) = \lim_{s \searrow 1} (s-1) \sum_{n \in A}' \frac{1}{n^s}$$

(b) Für die Dirichlet-Dichte einer Teilmenge <u>A in $\mathbb{P}$</u> hat man folgende äquivalente Definition

$$\delta_{\mathbb{P}}(A) = \lim_{s \searrow 1} \left(\sum_{p \in A}' \frac{1}{p^s} \Big/ \log \frac{1}{s-1} \right)$$

Für jede <u>endliche</u> Teilmenge A von $\mathbb{P}$ gilt $\delta_{\mathbb{P}}(A) = 0$.

<u>Bew.</u> Es ist

$$\frac{\sum\limits_{n \in A}' \frac{1}{n^s}}{\zeta(s)} = (s-1) \sum_{n \in A}' \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{(s-1)\zeta(s)}$$

Daraus folgt die obige Beh. (a), denn (wegen § 3, Kor. zu F1) gilt

(5) $$\lim_{s \searrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$$

Aus (5) folgt $\log \zeta(s) + \log(s-1) \xrightarrow{s \searrow 1} 0$, und somit

$$\log \zeta(s) \sim -\log(s-1) = \log \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s \searrow 1$$

Doch (nach § 3, Kor. zu F4') haben wir $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}}' \frac{1}{p^s} \sim \log \zeta(s)$, also

(6) $$\sum_{p \in \mathbb{P}}' \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s \searrow 1$$

Nun ist $$\frac{\sum\limits_{p \in A}' \frac{1}{p^s}}{\sum\limits_{p \in \mathbb{P}}' \frac{1}{p^s}} = \frac{\sum\limits_{p \in A}' \frac{1}{p^s}}{\log \frac{1}{s-1}} \cdot \frac{\log \frac{1}{s-1}}{\sum\limits_{p \in \mathbb{P}}' \frac{1}{p^s}},$$

und somit folgt mit (6) die Behauptung (b).

<u>Dirichlets Primzahlsatz:</u> Sei $m \in \mathbb{N}$. Für jedes zu m teilerfremde $a \in \mathbb{Z}$ setze $P_{a,m} := \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv a \bmod m\}$. Dann existiert $\delta_{\mathbb{P}}(P_{a,m})$ und es gilt

$$(7) \qquad \delta_{\mathbb{P}}(P_{a,m}) = \frac{1}{\varphi(m)} \qquad \text{[unabhängig von } a\text{ !]}$$

wobei $\varphi(m)$ = Anzahl der Restklassen $a \bmod m$ mit $(a,m) = 1$, also $\varphi(m)$ = Anzahl der $1 \le k \le m$ mit $(k,m) = 1$.

<u>Insbesondere ist also jedes $P_{a,m}$ unendlich, d.h. zu jedem a mit $(a,m) = 1$ gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv a \bmod m$.</u>

Einen Beweis von (7) im <u>Seminar</u>. Dort wird später ein weitergehendes Resultat bewiesen, und aus dem folgt, daß sogar $d_{\mathbb{P}}(P_{a,m})$ existiert und folglich

$$(8) \qquad d_{\mathbb{P}}(P_{a,m}) = \frac{1}{\varphi(m)}$$

gilt, d.h.

$$(9) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{P_{a,m}(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{\varphi(m)}$$

Im <u>Seminar</u> wird nämlich folgende Aussage bewiesen:

$$(10) \qquad P_{a,m}(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\log x} \qquad \text{("Primzahlsatz für arithmetische Progressionen")}$$

Durch Summation folgt aber daraus *)

$$\pi(x) \sim \sum_{\substack{1 \le a \le m \\ (a,m)=1}} P_{a,m}(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{also}$$

$$(11) \qquad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{("Primzahlsatz")} \quad **)$$

Damit ist (9) eine direkte Konsequenz aus (10) und (11).

---

*) beachte: Nur endlich viele $p \in \mathbb{P}$ sind nicht teilerfremd zu m.

**) Im übrigen geht (10) für $m=1$ direkt in (11) über.

Bem. 4: Die folgende Teilmenge A von $\mathbb{N}$ besitzt keine natürliche Dichte, doch sie hat die Dirichlet-Dichte $\delta(A) = \frac{1}{2}$:

$$A = \dot{\bigcup_{j=0}^{\infty}} \{ n \in \mathbb{N} \mid 4^j \le n < 2 \cdot 4^j \}$$

Sie besteht aus allen nat. Zahlen, die in einem der disjunkten Intervalle

$$[1,2[, \quad [4,8[, \quad [16,32[, \quad [64,128[, \; \ldots$$

liegen. Mit der Menge A' der nat. Zahlen, die in den verbleibenden Lücken

$$[2,4[, \quad [8,16[, \quad [32,64[, \; \ldots$$

liegen, also

$$A' = \dot{\bigcup_{j=0}^{\infty}} \{ n \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot 4^j \le n < 4^{j+1} \},$$

ist dann $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung von A und A'.

Für bel. $k \in \mathbb{N}$ ist

$$A(4^k) = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{k-1}$$

$$A(2 \cdot 4^k) = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^k, \quad \text{somit}$$

$$\frac{A(4^k)}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)$$

$$\frac{A(2 \cdot 4^k)}{2 \cdot 4^k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^k}\right), \text{ und es folgt}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A(4^k)}{4^k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \frac{1}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A(2 \cdot 4^k)}{2 \cdot 4^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Also kann $\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x}$ nicht existieren.

2) Wie man sich leicht überlegt, gilt

$$4^j \le k < 2\cdot 4^j \iff 2\cdot 4^j \le 2k < 4^{j+1} \iff 2\cdot 4^j \le 2k+1 < 4^{j+1}$$

Es folgt

$$\sum_{n\in A'} \frac{1}{n^s} = \sum_{\substack{n\in A' \\ n \text{ gerade}}} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{n\in A' \\ n \text{ ungerade}}} \frac{1}{n^s} = \sum_{k\in A} \frac{1}{(2k)^s} + \sum_{k\in A} \frac{1}{(2k+1)^s}$$

$$= 2\sum_{k\in A} \frac{1}{(2k)^s} + \sum_{k\in A}\left(\frac{1}{(2k+1)^s} - \frac{1}{(2k)^s}\right), \text{ somit}$$

$$\sum_{n\in A'} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} - g(s) \quad \text{mit } g(s) = \sum_{k\in A}\left(\frac{1}{(2k)^s} - \frac{1}{(2k+1)^s}\right)$$

Wegen $A \dot\cup A' = \mathbb{N}$ ist daher

$$\left(1 + \frac{1}{2^{s-1}}\right) \sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) + g(s), \text{ mithin}$$

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \frac{2^{s-1}}{1+2^{s-1}} \zeta(s) + \frac{2^{s-1}}{1+2^{s-1}} g(s), \quad \text{also}$$

$$\frac{\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s}}{\zeta(s)} = \frac{2^{s-1}}{1+2^{s-1}} + \frac{2^{s-1}}{1+2^{s-1}} \frac{g(s)}{\zeta(s)} \xrightarrow{s \searrow 1} \frac{1}{2},$$

denn für alle $s > 1$ hat man

$$0 \le g(s) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = 1 \quad \text{(und dies übrigens}$$

sogar für alle $s > 0$).

Es gilt also $\delta(A) = \frac{1}{2}$.