§6 Ziemliche Preliminarien zum Primzahlsatz

Wie in §3 bezeichne R den Ring $(R,+,*)$ der Funktionen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$.

<u>Def. 1:</u> Sei $f\in R$. Für alle $x\in\mathbb{R}_{>0}$ definiere

$$F(x) = \sum_{n\le x} f(n)$$

F heißt die summierende Funktion von f. [Zum Bsp. ist $\pi(x)$ die summierende Funktion der charakteristischen Fkt. f der Teilmenge $\mathbb{P}$ von $\mathbb{N}$:

$$\pi(x) = \sum_{n\le x} f(n) = \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} 1 = \text{Anzahl der } p\in\mathbb{P} \text{ mit } p\le x \;]$$

<u>Lemma 1:</u> Für $f,g\in R$ mit summierenden Fkt'n F,G ist die summierende Fkt. H von $f*g$ gegeben durch

$$(1)\qquad H(x) = \sum_{n\le x}(f*g)(n) = \sum_{n\le x} f(n)G\left(\tfrac{x}{n}\right) = \sum_{\substack{k,l\\ kl\le x}} f(k)g(l)$$

und folglich auch $H(x) = \sum_{n\le x} g(n)F\left(\frac{x}{n}\right)$.

Allgemeiner gilt: Ist $x = a\cdot b$ mit $a,b>0$, so hat man

$$(2)\qquad H(x) = \sum_{n\le a} f(n)G\left(\tfrac{x}{n}\right) + \sum_{n\le b} g(n)F\left(\tfrac{x}{n}\right) - F(a)G(b)$$

<u>Bew.</u> 1) $$\sum_{n\le x}(f*g)(n) = \sum_{n\le x}\Bigg(\sum_{\substack{k,l\\ kl=n}} f(k)g(l)\Bigg) = \sum_{\substack{k,l\\ kl\le x}} f(k)g(l) =$$

$$\sum_{k\le x} f(k)\Bigg(\sum_{\substack{l\\ lk\le x}} g(l)\Bigg) = \sum_{k\le x} f(k)\Bigg(\sum_{l\le\frac{x}{k}} g(l)\Bigg) = \sum_{n\le x} f(n)\,G\left(\tfrac{x}{n}\right)$$

2) Mit $x = ab$ wie vorausgesetzt, ist

$$\{(k,l) \mid kl \le x\} = \{(k,l) \mid k \le a,\ l \le \tfrac{x}{k}\} \cup \{(k,l) \mid k \ge a,\ l \le \tfrac{x}{k} = b\tfrac{a}{k}\}$$

$$= \{(k,l) \mid k \le a,\ l \le \tfrac{x}{k}\} \cup \{(k,l) \mid l \le b,\ k \le \tfrac{x}{l}\}$$

mit Durchschnitt

$$\{(k,l) \mid k \le a,\ l \le b\}. \qquad \text{Es folgt}$$

$$H(x) = \sum_{\substack{k,l \\ kl \le x}}' f(k)g(l) = \sum_{k \le a}' f(k)\Big(\sum_{l \le \frac{x}{k}}' g(l)\Big) + \sum_{l \le b}' g(l)\Big(\sum_{k \le \frac{x}{l}}' f(k)\Big) - \sum_{k \le a}' f(k)\Big(\sum_{l \le b}' g(l)\Big)$$

$$= \sum_{n \le a}' f(n)\, G\big(\tfrac{x}{n}\big) + \sum_{n \le b}' g(n)\, F\big(\tfrac{x}{n}\big) - G(b)\,F(a)$$

<u>Def. 2:</u> Die Čebyshev-Funktion ψ ist die summat. Fkt. der von Mangoldt-Fkt. Δ, also

$$\psi(x) = \sum_{n \le x}' \Delta(n) = \sum_{p}\Big(\sum_{\substack{m \\ p^m \le x}}' \log p\Big) = \sum_{p}'\Big(\sum_{\substack{m \\ p \le x^{\frac{1}{m}}}} \log p\Big), \text{ somit}$$

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{p \le x^{\frac{1}{m}}}' \log p\Big).$$

Daher betrachtet man neben ψ auch die Fkt. θ, def. durch

$$\theta(x) = \sum_{p \le x}' \log p\,.$$

Wegen $p \le x^{\frac{1}{m}} \iff \log p \le \frac{1}{m}\log x \iff m \le \frac{\log x}{\log p} \le \frac{\log x}{\log 2}$ gilt

$$\psi(x) = \sum_{m \le \frac{\log x}{\log 2}}' \theta(x^{\frac{1}{m}}) = \theta(x) + \sum_{2 \le m \le \frac{\log x}{\log 2}}' \theta(x^{\frac{1}{m}})$$

Aus der Def. von $\theta(x)$ folgt $\theta(x) \le x\log x$, und damit erhält man

$$0 \le \psi(x) - \Theta(x) \le \sum_{2 \le m \le \frac{\log x}{\log 2}} x^{\frac{1}{m}} \log(x^{\frac{1}{m}}) \le x^{\frac{1}{2}} \log(x^{\frac{1}{2}}) \frac{\log x}{\log 2}$$

und somit

<u>F1:</u> $$0 \le \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\Theta(x)}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{(\log x)^2}{\log 2}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Theta(x)}{x},$$

wenn einer der beiden Limites existiert. $\square$

Das ist alles fein, aber es wäre im Hinsicht auf den Primzahlsatz wertlos, wenn wir keine Verbindung der Fktn ψ bzw. Θ zur Funktion $\pi(x)$ herstellen können. Eine solche Verbindung aber besteht:

<u>F2:</u> Man hat

$$\Theta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt$$

$$\pi(x) = \frac{\Theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\Theta(t)}{t\log^2 t}\,dt$$

Es gilt

(*) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Theta(x)}{x},$$

wenn einer der beiden Limites existiert.

<u>Bem.</u> Der <u>Primzahlsatz</u> ist die Aussage $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$.

Sein Beweis ist nach F1, F2 auf das Studium der Fktn ψ bzw. Θ zurückgeführt, die in organischer Weise der Zetafunktion ζ entspringen.

<u>Beweis von F2:</u> Es bezeichne $c = c_{\mathbb{P}}$ die charakteristische Funktion von $\mathbb{P}$ in $\mathbb{N}$. Def'gemäß ist dann

$$\pi(x) = \sum_{2 \le n \le x} c(n) \qquad \text{sowie} \qquad \theta(x) = \sum_{2 \le n \le x} c(n) \log n$$

Angewandt auf die zweite Summe liefert Abel' mit $g(t) = \log t$ sofort

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

Angewandt auf die erste Summe $\pi(x) = \sum_{2 \le n \le x} (c(n) \log n) \cdot \frac{1}{\log n}$ liefert Abel' mit $g(t) = \frac{1}{\log t}$, also $g'(t) = -\frac{1}{t} \frac{1}{\log^2 t}$, sofort

$$\pi(x) = \theta(x) \cdot \frac{1}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt$$

Damit sind die ersten beiden Aussagen von F2 schon bewiesen. Nach der ersten ist

$$(3) \quad \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

Existiere nun der Limes auf der linken Seite von (*). Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\frac{\pi(t)}{t/\log t} \le C \quad \text{für alle } t \ge 2$$

(denn auf einem beschränkten Teilbereich von $t \ge 2$ ist $\frac{\pi(t) \log t}{t}$ beschränkt).

Es folgt $\displaystyle \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = \int_2^x \frac{\pi(t)}{t/\log t} \cdot \frac{dt}{\log t} \le C \int_2^x \frac{dt}{\log t}$

Weiter ist $\displaystyle \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \le \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x}{\log \sqrt{x}}$

Damit geht die r. S. von (3) für $x \to \infty$ gegen 0. Also existiert auch $\lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x}$ und es gilt (*).

Existiere jetzt der Limes auf der rechten Seite von (*). Dann gibt es ein $C>0$ mit

$$\frac{\theta(t)}{t} \leq C \text{ für alle } t \geq 2$$

Nach der zweiten Gleichung in F2 ist

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt ,$$

und hier ist die r.S. $\leq C\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}$ mit

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x}{\log^2(\sqrt{x})} \text{ ; also ist}$$

$$\text{obige r.S.} \leq C\left(\frac{1}{\log^2 2}\frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{\log x}{\left(\frac{1}{2}\log x\right)^2}\right) \longrightarrow 0 \text{ für } x\to\infty$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}$ und es gilt (*). $\square$

<u>F3:</u> Für alle $x \geq 1$ gilt

$$\left|\sum_{n\leq x}{}' \frac{\mu(n)}{n}\right| \leq 1$$

<u>Bew.</u> O.E. $x \geq 2$. Es ist $\varepsilon = \mu * 1$. Nach Lemma 1 also

Bezeichnung: $\langle t\rangle := t-[t]$
$0 \leq \langle t\rangle < 1$

$$1 = \sum_{n\leq x}{}' \varepsilon(n) = \sum_{n\leq x}{}' \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq x}{}' \mu(n)\left(\frac{x}{n} - \left\langle\frac{x}{n}\right\rangle\right) =$$

$$x\sum_{n\leq x}{}' \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n\leq x}\mu(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle, \text{ also}$$

$$x\sum_{n\leq x}{}' \frac{\mu(n)}{n} = 1 + \sum_{n\leq x}{}' \mu(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle = 1 + \langle x\rangle + \sum_{2\leq n\leq x}\mu(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle, \text{ also}$$

$$x\left|\sum_{n\leq x}{}' \frac{\mu(n)}{n}\right| \leq 1 + \langle x\rangle + \sum_{2\leq n\leq x}{}' |\mu(n)| \leq 1 + \langle x\rangle + [x] - 1 = x$$

Es folgt die Beh.

Wir führen jetzt einige in der analytischen Zahlentheorie sehr gebräuchliche Bezeichnungen ein:

<u>Def. 3</u>: Für Fkt'n $f: [c,\infty) \to \mathbb{C}$, $g: [c,\infty] \to \mathbb{R}_{>0}$ schreibt man

$$f(x) = O(g(x)) \quad (\text{für } x \geq c) \qquad \text{"groß O von } g(x)\text{"}$$

⌜oder: $f = O(g)$ (auf $x \geq c$)⌟,

wenn $\frac{f}{g}$ auf $[c,\infty)$ beschränkt ist, es also ein $C>0$ gibt mit $|f(x)| \leq C g(x)$ für alle $x \geq c$.

Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{"klein o von } g(x)\text{"}$$

⌜oder $f = o(g)$⌟,

wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gilt.

Für eine weitere Funktion $\tilde{f}: [c,\infty) \to \mathbb{C}$ schreibt man

$$f(x) = \tilde{f}(x) + O(g(x)) \; (\text{für } x \geq c) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \tilde{f}(x) + o(g(x)),$$

wenn $f(x) - \tilde{f}(x) = O(g(x))$ (für $x \geq c$) bzw. $f(x) - \tilde{f}(x) = o(g(x))$.

Wir schreiben

(4) $$f(x) \sim g(x) \quad (\text{für } x \to \infty),$$

wenn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt. Offenbar ist (4) äquivalent zu

(4') $$f(x) = g(x) + o(g(x))$$

Bem'n: 1) Der Primzahlsatz besagt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (\text{für } x \to \infty) \qquad \ulcorner x \geq 2 \lrcorner$$

⌈oder äquivalent dazu: $\pi(x)\log(x) \sim x$ (für $x \to \infty$)

bzw. $\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\log x}$ (für $x \to \infty$) ⌋

Nach F1, F2 ist der Primzahlsatz demnach äquivalent zur Aussage

$$\psi(x) \sim x \quad (\text{für } x \to \infty),$$

was wir wie gesagt auch durch die Aussage

$$\psi(x) = x + o(x)$$

ausdrücken können.

2) $f(x) = O(1)$ besagt: f ist beschränkt

$f(x) = o(1)$ besagt: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

3) Für $x \geq 2$ gilt

(5) $$\log([x]!) = x\log x - x + O(\log x)$$

(6) $$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\log x - x + O(\log x), \text{ also auch}$$

(7) $$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\log x + O(x)$$

Bew. $\log([x]!) = \sum_{n\leq x} \log n = \sum_{n\leq x} 1\cdot\log n \overset{\text{Abel}'}{=} [x]\log x - \int_1^x [t]\frac{dt}{t} =$

$[t] = t - \langle t\rangle$

$x\log x + ([x]-x)\log x - \int_1^x dt + \int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t}dt =$

$x\log x - x + \underbrace{1 + ([x]-x)\log x + \int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t}dt}_{= O(\log x)}$ mit $\int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t}dt \leq \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x$