Damit ist (5) bewiesen. Daraus folgt (6), denn nach §3, F6 ist $\Lambda * 1 = \log$, also folgt aus Lemma 1

$$\sum_{n\le x} \log(n) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right]$$

Wie gesagt folgt (7) aus (6). Wir haben (7) aus folgendem Grund erwähnt: Teilen wir (7) – unter Fortlassen der Klammern [ ] – durch x, so erhalten wir

$$(8) \qquad \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$$

In der Tat ist (8) richtig, aber ein wirklicher Beweis dafür benötigt mehr als (7), siehe den Anhang zu §6.

F4: Es gibt eine Konstante C mit

$$(9) \qquad \sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Es ist $C = \gamma > 0$ die Eulersche Konstante.

Bew. Sei $g(t) = \frac{1}{t}$. Dann

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n} = \sum_{n\le x} 1\cdot g(n) \overset{\text{Abel}'}{=} [x]\cdot\frac{1}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2}\,dt =$$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t^2}\,dt + 1 - \frac{\langle x\rangle}{x} =$$

$$\log x - \int_1^\infty \frac{\langle t\rangle}{t^2}\,dt + \underbrace{\int_x^\infty \frac{\langle t\rangle}{t^2}\,dt}_{< \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}} + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\log x + \underbrace{1 - \int_1^\infty \frac{\langle t\rangle}{t^2}\,dt}_{=: C > 0} + O\left(\frac{1}{x}\right), \text{ also (9).}$$

Aus (9) für $x \to \infty$ erhält man wegen $O(\frac{1}{x}) = o(1)$

$$C = \lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{n\le x}{}' \frac{1}{n} - \log x \Big) = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N}{}' \frac{1}{n} - \log N \Big) = \gamma$$

(Limes existiert!)

<u>Bem.</u> $\sum_{n\le x}{}' \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{x}$ für $x \ge 1$

<u>Bew.</u> Mit $g(t) = t^{-1/2}$ liefert Abel':

$$\sum_{n\le x}{}' 1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = [x]\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int_1^x [t]\, t^{-3/2}\,dt \le \sqrt{x} + \frac{1}{2}\int_1^x t^{-1/2}\,dt =$$

$(t^{1/2})' = \frac{1}{2}t^{-1/2}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 \le 2\sqrt{x}$$

<u>F5 (Dirichlet):</u> Für die Fkt. σ_0 gilt

$$\sum_{n\le x}{}' \sigma_0(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

(mit der Eulerschen Konstanten γ).

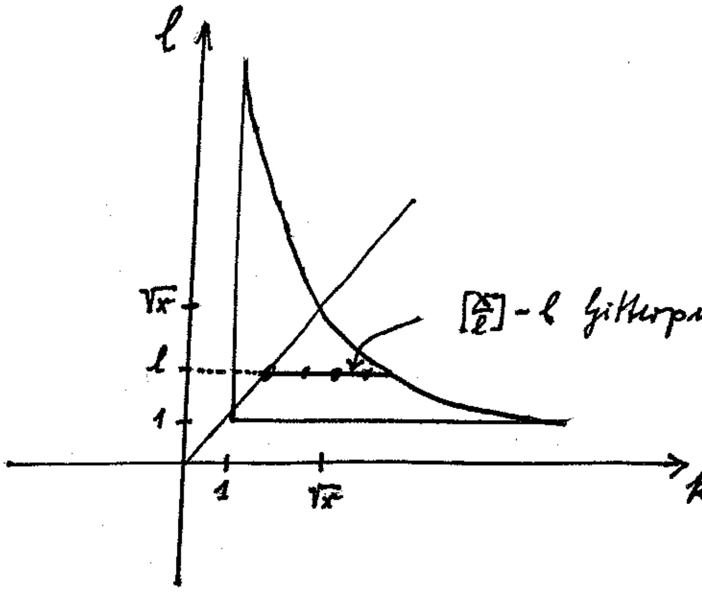
<u>Bew.</u> Sei H die summ. Fkt. von $\sigma_0 = 1 * 1$, also

$$H(x) = \sum_{n\le x}{}' \sigma_0(n) = \sum_{\substack{k,l \\ kl\le x}}{}' 1 \qquad \text{(vgl. auch Lemma 1)}$$

Betrachte die Hyperbel $kl = x$ $\quad$ x fest; k, l variabel $\in \mathbb{R}$

Dann ist $H(x)$ = Anzahl der Pkte aus $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ unterhalb oder auf der Hyperbel

= 2 · Anzahl der genannten Pkte unterhalb der Diagonalen + Anzahl der genannten Pkte auf der Diagonalen



$\left[\frac{x}{l}\right] - l$ Gitterpunkte auf dieser Strecke (ohne den Diagonalpkt.)

Damit erhält man

$$H(x) = 2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' \left(\left[\frac{x}{l}\right] - l \right) + [\sqrt{x}] =$$

$$-2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' l + 2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' \frac{x}{l} - 2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' \left\langle \frac{x}{l} \right\rangle + \sqrt{x} =$$

$$2x \sum_{l \le \sqrt{x}}' \frac{1}{l} - 2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' l + O(\sqrt{x}) \overset{F4}{=}$$

$$\underbrace{2x \log \sqrt{x}}_{\parallel} + 2x\gamma + \underbrace{2x\, O\!\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x})}_{\parallel} - 2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' l =$$

$$x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

denn $2 \sum_{l \le \sqrt{x}}' l = [\sqrt{x}]\left([\sqrt{x}] + 1\right) = [\sqrt{x}]^2 + [\sqrt{x}] = [\sqrt{x}]^2 + O(\sqrt{x})$

$$= \left(\sqrt{x} - \langle \sqrt{x} \rangle\right)^2 + O(\sqrt{x}) = x + O(\sqrt{x})$$

<u>F6:</u> Sei M die summ. Fkt. von μ, also

$$M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)$$

Angenommen, es gelte

(10) $$M(x) = o(x)$$

Dann folgt

(11) $$\psi(x) \sim x,$$

also der Primzahlsatz (vgl. Bem. 1 nach Def. 3)

[<u>Bem.</u> Mit ähnlichen Methoden wie im folgenden Beweis kann man auch zeigen, daß umgekehrt aus dem Primzahlsatz die Aussage (10) folgt, siehe w.u.]

<u>Beweis von F6:</u> Es ist ψ die summ. Fkt. von Λ. Wir haben (nach §3, F7 mit $c = -2\gamma$)

(12) $$\Lambda = 1 - 2\gamma\varepsilon + (\log - \sigma_0 + 2\gamma) * \mu$$

und setzen zur Abkürzung $f := \log - \sigma_0 + 2\gamma$. Es bezeichne nun F die summ. Fkt von f, und H die summ. Fkt. von $\mu * f$. Geht man von (12) zu den summ. Fkt'n über, so erhält man

(13) $$\psi(x) = [x] - 2\gamma + H(x) = x + H(x) + O(1),$$

und nach (2) in Lemma 1 ist für beliebiges $a > 0$

(14) $$H(x) = \sum_{n \le a} f(n) M\left(\tfrac{x}{n}\right) + \sum_{n \le \frac{x}{a}} \mu(n) F\left(\tfrac{x}{n}\right) - F(a) M\left(\tfrac{x}{a}\right)$$

Zum Beweis unserer Behauptung $\psi(x) \sim x$ ist zu zeigen, daß

(15) $$H(x) = o(x)$$

gilt.

Definitionsgemäß ist

$$F(x) = \underbrace{\sum_{n\le x}{}' \log n}_{\log([x]!)} - \sum_{n\le x}{}' \sigma_0(n) + 2\gamma[x]$$

Anwendung von F5 (Dirichlet!) liefert

$$F(x) = \log([x]!) - x\log x - (2\gamma-1)x + 2\gamma x + O(\sqrt{x})$$

Wegen $\log([x]!) - x\log x + x = O(\log x)$ ⌜vgl. Bem. 3 zu Def. 3⌟

⌜im übrigen gilt $\log x \le \sqrt{x}$ für alle $x\ge 1$⌟ – und wegen $O(\log x) = O(\sqrt{x})$ – folgt damit

(16) $$F(x) = O(\sqrt{x})$$

Es gibt folglich eine Konstante $C>0$ mit

(17) $$|F(x)| \le C\sqrt{x} \quad \text{für alle } x \ge 1.$$

Für den zweiten Summanden in (14) folgt daher

*) vgl. Bem. nach F4

$$\Big|\sum_{n\le \frac{x}{a}}{}' \mu(n) F(\tfrac{x}{n})\Big| \le C \sum_{n\le\frac{x}{a}}{}' \sqrt{\tfrac{x}{n}} = C\sqrt{x}\sum_{n\le\frac{x}{a}}{}' \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{*)}{\le} C\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{\tfrac{x}{a}} = \frac{2C}{\sqrt{a}}\, x$$

Sei nun $\varepsilon>0$ gegeben. Wir wählen $a>1$ so, daß

(18) $$\frac{2C}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

gilt. Dann ist

(19) $$\Big|\sum_{n\le\frac{x}{a}}{}' \mu(n) F(\tfrac{x}{n})\Big| < \varepsilon x \quad \text{für alle } x \ge 1.$$

Nachdem wir ein $a\ge 1$ mit (18) fixiert haben, ist $C_1 := \sum_{n\le a}{}' \frac{|F(n)|}{n}$ eine <u>Konstante</u> ≥ 0. Nach Voraussetzung (10) gibt es ein $x_0>0$ mit

$$\frac{|M(x)|}{x} < \frac{\varepsilon}{C_1} \quad \text{für alle } x \ge x_0$$

⌜Setze $\frac{\varepsilon}{0} = \infty$ im Falle $C_1 = 0$. Im übrigen ist wirklich $C_1 > 0$.⌟

Für den ersten Summanden in (14) ist daher

(20) $$\Big|\sum_{n\le a}{}' f(n)\,M(\tfrac{x}{n})\Big| \le \frac{\varepsilon}{c_1}\sum_{n\le a}{}' |f(n)|\frac{x}{n} = \varepsilon x,$$

vorausgesetzt $\frac{x}{n} \ge x_0$ für alle $n \le a$. Also gilt (20) für alle $x \ge a x_0$ (denn dann ist in der Tat $\frac{x}{n} \ge \frac{x}{a} \ge x_0$). Es ist also

(21) $$\Big|\sum_{n\le a}{}' f(n)\,M(\tfrac{x}{n})\Big| \le \varepsilon x \quad \text{für alle } x \ge a x_0$$

Für den dritten Summanden in (14) ist

(22) $$|F(a)M(\tfrac{x}{a})| \overset{(17)}{\le} C\sqrt{a}\,|M(\tfrac{x}{a})| \le C\sqrt{a}\,\frac{x}{a} = \frac{C}{\sqrt{a}}x \overset{(18)}{<} \varepsilon x$$

für alle $x \ge 1$

Insgesamt gilt – nach (19), (21), (22) –

$$|H(x)| < 3\varepsilon x \qquad \text{für alle } x \ge a x_0$$

Es folgt (15) und damit ist F6 bewiesen. $\square$

<u>F7 (Landau):</u> Angenommen, es gelte

(23) $$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Dann folgt $\psi(x) \sim x$, also der Primzahlsatz.

<u>Bew.</u> Nach F6 genügt es zu zeigen, daß

(10) $$M(x) = o(x)$$

gilt. Für bel. $x \ge 1$ setze $A(x) = \sum_{n\le x}{}' \frac{\mu(n)}{n}$. Dann ist

$$M(x) = \sum_{n\le x}{}' \mu(n) = \sum_{n\le x}{}' \frac{\mu(n)}{n}\cdot n \underset{\text{mit } g(t)=t}{\overset{\text{Abel}'}{=}} A(x)x - \int_1^x A(t)\,dt,$$

also

$$\frac{M(x)}{x} = A(x) - \frac{1}{x}\int_1^x A(t)\,dt$$

Zum Beweis von (10) ist also

$$(*) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x A(t)\,dt = 0$$

zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung (23) gibt es ein $c = c(\varepsilon) > 1$ mit

$$|A(x)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } x \ge c$$

Nach F3 ist $|A(x)| \le 1$ für alle $x \ge 1$. Wegen
$\int_1^x A(t)dt = \int_1^c A(t)dt + \int_c^x A(t)dt$ folgt nun

$$\left|\frac{1}{x}\int_1^x A(t)dt\right| \le \frac{1}{x}\int_1^c |A(t)|dt + \frac{1}{x}\int_c^x |A(t)|dt \le$$

$$\frac{1}{x}(c-1) + \frac{1}{x}\varepsilon(x-c) \le \frac{1}{x}(c-1) + \varepsilon$$

$$\text{für alle } x \ge c.$$

Für $x \to \infty$ strebt $\frac{1}{x}(c-1)$ gegen 0, also ist

$$\left|\frac{1}{x}\int_1^x A(t)dt\right| \le 2\varepsilon \quad \text{für alle hinreichend großen } x.$$

Es folgt (*). $\square$

Bei unserem späteren Beweis des Primzahlsatzes (in §7) werden wir uns nur auf F7 stützen.
Doch zur Abrundung des Bildes zeigen wir jetzt noch:

<u>Satz 1:</u> Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $$M(x) = \sum_{n \le x}{}' \mu(n) = o(x)$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(n)}{n} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{n \le x}{}' \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$$

(c) $$\psi(x) = x + o(x) \quad \text{(Primzahlsatz, vgl. Bem 1 nach Def. 3)}$$

Dabei läßt sich diese Äquivalenz bloß mit Basiswissen aus Analysis zeigen.

<u>Bew.</u> Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) ist uns schon nach F7 bekannt. Es bleiben also noch (c) $\Rightarrow$ (a) und (a) $\Rightarrow$ (b) zu zeigen.

1) Es gelte (c), mit $\psi_0(x) := \psi(x) - [x]$ also

(24) $$\psi_0(x) = o(x)$$

ψ_0 ist die summ. Fkt. von $\Lambda_0 := \Lambda - 1$. Nach §3, F6 gilt
$-\mu \cdot \log = \Lambda * \mu = \Lambda_0 * \mu + 1 * \mu = \Lambda_0 * \mu + \varepsilon$
Bezeichnet also H die summ. Fkt von $\Lambda_0 * \mu$, so folgt

(25) $$-\sum_{n \le x}{}' \mu(n) \log n = H(x) + 1$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, daß

(26) $$\sum_{n \le x}{}' \mu(n) \log n = o(x \log x)$$

gilt. Wegen (25) ist dazu

(27) $$H(x) = o(x \log x)$$

zu zeigen.

Für beliebiges $a>0$ ist nun nach Lemma 1

$$H(x) = \sum_{n\le a} \Delta_0(n)\, M\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\le \frac{x}{a}} \mu(n)\, \psi_0\left(\frac{x}{n}\right) - \psi_0(a)\, M\left(\frac{x}{a}\right)$$

$|\Delta_0(n)| \le \Lambda(n)+1 \le \log n + 1 \le n$

Sei $\varepsilon>0$ gegeben.

Nach Vor. (24) gibt es ein $a>1$ mit $\psi_0(x) \le \varepsilon x$ für alle $x \ge a$.

Wir fixieren a und haben dann für alle $x \ge a$

$$|H(x)| \le \sum_{n\le a} n\frac{x}{n} + \sum_{n\le x/a} \varepsilon \frac{x}{n} + \varepsilon a \frac{x}{a} \le$$

⌜wegen $a>1$ ist $x/a \le x$⌟

$$ax + \varepsilon x \sum_{n\le x} \frac{1}{n} + \varepsilon x \overset{F4}{\le}$$

$$ax + \varepsilon x + \varepsilon x\left(\log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Für alle hinreichend großen x ist also

$$|H(x)| \le x\log x\left(\varepsilon + \frac{a}{\log x} + \frac{\varepsilon}{\log x} + \frac{\varepsilon\gamma}{\log x} + \frac{\varepsilon}{\log x}\right)$$

Für alle hinreichend großen x hat man somit

$|H(x)| \le (5\varepsilon)\, x\log x$, und es folgt (27).

Nun ergibt sich (a) wie folgt: Abel' mit $g(t)=\log t$ liefert

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\log n = M(x)\log x - \int_1^x \frac{M(t)}{t}\,dt$$

Wegen $\left|\int_1^x \frac{M(t)}{t}\,dt\right| \le \int_1^x \frac{|M(t)|}{t}\,dt \le \int_1^x 1\,dt \le x$ ist jedenfalls

$$\int_1^x \frac{M(t)}{t}\,dt = o(x\log x)$$

Zusammen mit (26) erhält man somit $M(x)\log x = o(x\log x)$, also $M(x) = o(x)$, d.h. (a).

2) Es gelte (a). Es ist 1 die summ. Fkt. von $\varepsilon = 1 * \mu$. Mit Lemma 1 folgt für jedes $a > 0$:

$$1 = \sum_{n \le a} M\left(\frac{x}{n}\right) + \underbrace{\sum_{n \le \frac{x}{a}} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]}_{\sum_{n \le \frac{x}{a}} \mu(n)\frac{x}{n} - \sum_{n \le \frac{x}{a}} \mu(n)\langle\frac{x}{n}\rangle} - [a]\, M\left(\frac{x}{a}\right)$$

also

$$x \cdot \sum_{n \le \frac{x}{a}} \frac{\mu(n)}{n} = 1 - \sum_{n \le a} M\left(\frac{x}{n}\right) + [a]\, M\left(\frac{x}{a}\right) + \sum_{n \le \frac{x}{a}} \mu(n)\left\langle\frac{x}{n}\right\rangle,$$

und es folgt

$$\left|\sum_{n \le \frac{x}{a}} \frac{\mu(n)}{n}\right| \le \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{x} \sum_{n \le a} \left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|}_{= \sum_{n \le a} \frac{1}{n} \frac{|M(x/n)|}{x/n}} + \frac{a}{x}\left|M\left(\frac{x}{a}\right)\right| + \frac{1}{a}$$

Sei a fest, aber beliebig. Aufgrund der Voraussetzung $M(x) = o(x)$ gehen die ersten 3 der obigen Glieder für $x \to \infty$ gegen 0. Es gibt also ein $x_0 = x_0(a)$ mit

$$(28) \quad \left|\sum_{n \le \frac{x}{a}} \frac{\mu(n)}{n}\right| \le \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \quad \text{für alle } x \ge x_0(a)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und fixiere $a = a(\varepsilon)$ mit $\frac{2}{a} < \varepsilon$. Wähle dann ein $N_0 = N_0(\varepsilon)$ so groß, daß $N_0 a \ge x_0(a)$. Für alle $N \ge N_0$ ist dann $Na \ge x_0(a)$, also liefert (28) mit $x = Na$ nun

$$\left|\sum_{n \le N} \frac{\mu(n)}{n}\right| \le \varepsilon \quad \text{für alle } N \ge N_0$$

Es folgt $\lim\limits_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n} = 0$, d.h. (b).