§8 Zur komplexen Γ-Funktion

In Analysis I wird die Gammafunktion $\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(1) \qquad \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t} \qquad \text{(Euler 1730)},$$

wobei das uneigentliche Integral*) konvergent ist.

Für beliebiges $s \in \mathbb{C}$ und $t > 0$ hat $t^s := e^{s \log t}$ den Betrag

$\sigma = Re(s)$

$$|t^s| = e^{Re(s) \log t} = t^{Re(s)} = t^\sigma$$

Daraus folgt: Für $Re(s) > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

absolut-konvergent, und zwar lokal gleichmäßig in s (sowohl hinsichtlich oberer wie unterer Integrationsgrenze).

Damit definiert (1) eine Funktion $\Gamma: U = \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 0\} \to \mathbb{C}$, und diese ist holomorph; denn die Folge der Funktionen $f_n(s) = \int_{1/n}^n t^{s-1} e^{-t} dt$ konvergiert auf U lokal gleichmäßig gegen Γ (und jedes f_n ist holomorph auf U). – Bekanntlich gilt

$$(2) \qquad \Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \qquad [\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n+1) = n!]$$

für $s > 0$; nach dem Identitätssatz gilt (2) dann auch für alle $s \in U$. Aus (2) folgt induktiv

---

*) für $0 < s < 1$ ist dieses auch hinsichtlich der unteren Integrationsgrenze 0 uneigentlich.

(3) $$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Die rechte Seite von (3) liefert eine auf $Re(s) > -(n+1)$ meromorphe Funktion mit (einzigen) Polen in $s = 0, -1, \ldots, -n$; diese sind sämtlich einfach und haben die Residuen

(4) $$Res_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Wir sehen:

F1: Die Funktion (1) vermittelt eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $\Gamma(s)$ mit Polstellenmenge $-\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, \ldots\}$; alle Pole sind einfach, und es gilt (4). Außerdem gilt die Funktionalgleichung (2) jetzt natürlich*) auf ganz $\mathbb{C}$.

*) Identitätssatz!

Wie man (1) sofort entnimmt, hat man

(5) $$|\Gamma(s)| \leq \Gamma(\sigma) \text{ für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \sigma = Re(s) > 0$$

Insbesondere folgt

Bem. Auf jedem Streifen $S = \{s \in \mathbb{C} \mid a \leq Re(s) \leq b\}$ mit $0 < a < b < \infty$ ist Γ beschränkt.

Satz 1 (Wielandt 1939): Sei f eine auf $U := \{s \mid Re(s) > 0\}$ holomorphe Funktion mit

$$f(s+1) = s f(s) \qquad \text{für alle } s \in U.$$

Außerdem sei f im Streifen $S = \{s \in \mathbb{C} \mid 1 \leq Re(s) < 2\}$ beschränkt. Dann gilt

(6) $$f(s) = c\,\Gamma(s) \quad \text{mit} \quad c = f(1)$$

Beweis (fast so schön wie der Satz, vgl. Remmert FT II, S. 38):
Setze $g := f - c\Gamma$, mit $c = f(1)$. Dann ist auch g holomorph auf U und erfüllt ebenfalls

(*) $$g(s+1) = s\,g(s) \qquad \text{für alle } s \in U$$

Daraus folgt – analog wie oben für Γ – auch für g: g ist meromorph fortsetzbar auf ganz $\mathbb{C}$ mit höchstens einfachen Polen in den Punkten $s = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\mathrm{Res}_{-n}(g) = \frac{(-1)^n}{n!}\,g(1)$$

Wegen $g(1) = f(1) - c\Gamma(1) = f(1) - c = 0$, ist jetzt aber g holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Da f und Γ auf S beschränkt sind, so auch g. (Außerdem gilt (*) jetzt natürlich auf ganz $\mathbb{C}$.)

Beh. g ist auch auf $S_0 := \{s \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1\}$ beschränkt.
Denn:
① g ist beschränkt auf $\{s \mid 0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1,\ |\mathrm{Im}(s)| \le 1\}$, da dort stetig.
② g ist beschränkt auf $\{s \mid \mathrm{Re}(s) = 1\}$ wegen der Vor. (und Bem. zu F1).
③ $g(s) = \frac{g(s+1)}{s}$ ist auch auf der Menge der s mit $0 \le \mathrm{Re}(s) < 1$ und $|\mathrm{Im}(s)| > 1$ beschränkt, da für jedes solche s gilt: $s+1 \in S$ und $|s| > 1$.

Betrachte nun die ganze Funktion

(7) $$h(s) = g(s)\,g(1-s)$$

Für sie gilt $h(s+1) = g(s+1)\,g(-s) = s\,g(s)\,g(-s) = -g(s)(-s\,g(-s)) = -g(s)\,g(-s+1) = -h(s)$, also

(8) $$h(s+1) = -h(s) \quad \text{auf } \mathbb{C},$$

d.h. h ist bis auf's Vorzeichen periodisch mit Periode 1. Aus der obigen Beh. aber folgt, daß h auf $S_0 = \{s \mid 0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1\}$ beschränkt ist. Zusammen mit (8) folgt: h ist auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach Liouville ist damit aber h konstant, wegen $h(1) = g(1)g(0) = 0$ also $h = 0$. Mit Blick auf (7) folgt $g = 0$, d.h. die Behauptung (6).

<u>Eine Anwendung von Satz 1:</u> Betrachte die Funktion

$$f(s) = 2^{s-1}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})\,\Gamma(\tfrac{s+1}{2})$$

Für sie ist $f(s+1) = 2^{s}\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+1) = 2^{s}\Gamma(\frac{s+1}{2})\,\frac{s}{2}\,\Gamma(\frac{s}{2}) = s f(s)$.
Für $s \in S$ ist $\frac{1}{2} \le Re(\frac{s}{2}) < 1$ sowie $1 \le Re(\frac{s+1}{2}) < \frac{3}{2}$, also ist
$\vee$ mit $a>0$
f beschränkt auf S, da Γ auf jedem Streifen $a \le Re(s) \le b$ $\vee$ beschränkt ist (vgl. Bem. nach F1). Es folgt

$$f(s) = f(1)\,\Gamma(s) \quad \text{mit} \quad f(1) = \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(1) = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,,$$

wobei sich die bekannte Relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ auch noch einmal aus der späteren Feststellung F2 ergeben wird. Jedenfalls erhalten wir damit die (sehr bedeutsame)

<u>"Legendresche Verdopplungsformel"</u>: Es gilt

$$(9) \qquad 2^{s-1}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})\,\Gamma(\tfrac{s+1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(s)\,,$$

was man natürlich auch in der folgenden Form ausdrücken kann:

$$(9') \qquad \pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\,\Gamma(s)\,\Gamma(s+\tfrac{1}{2})\,.$$

<u>F2 ("Eulersche Ergänzungsformel"):</u> Es gilt

$$(10) \qquad \Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

<u>Bew.</u> Mit $f(s) := \Gamma(s)\Gamma(1-s) - \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ erhalten wir eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen mit höchstens einfachen Polen in den Punkten $s = m \in \mathbb{Z}$. Für $m = n \in \mathbb{N}$ gilt $Res_n(\Gamma(s)\Gamma(1-s)) = \Gamma(n)\,Res_n\,\Gamma(1-s) = -\Gamma(n)\,Res_{-(n-1)}\,\Gamma(s) \overset{(4)}{=} -\Gamma(n)\cdot(-1)^{n-1}/(n-1)! = (-1)^n$; aber auch für $m = -n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $Res_m(\Gamma(s)\Gamma(1-s)) = \Gamma(1-m)\,Res_{-n}\,\Gamma(s) \overset{(4)}{=} \Gamma(n+1)(-1)^n/n! = (-1)^n = (-1)^m$. In jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$ hat aber $\pi/\sin(\pi s)$ das

gleiche Residuum, denn

$$\mathrm{Res}_m\left(\frac{\pi}{\sin\pi s}\right) = \frac{\pi}{\pi\cos\pi s}\Big|_{s=m} = (-1)^m.$$

Folglich ist $f(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, d.h. eine <u>ganze Funktion</u>. Sie besitzt – wie die Funktion $\sin(\pi s)$ – die Eigenschaften

(11) $\quad f(s+2) = f(s)$ und $f(-s) = -f(s)$,

denn beides gilt auch für die Funktion $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$:

$\Gamma(s+2)\Gamma(1-(s+2)) = \Gamma(s+2)\Gamma(-s-1) = \Gamma(s)s(s+1)\Gamma(-s-1) =$

$\Gamma(s)(-s)(-s-1)\Gamma(-s-1) = \Gamma(s)(-s)\Gamma(-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s)$ sowie

$\Gamma(-s)\Gamma(1-(-s)) = \Gamma(-s)\Gamma(s+1) = \Gamma(-s)s\Gamma(s) = -\Gamma(1-s)\Gamma(s)$.

<u>Beh.</u> f ist im Streifen $T = \{s \mid 1 \le \mathrm{Re}(s) \le 3\}$ beschränkt.

Ist das bewiesen, so ist f wegen der 1. Gleichung von (11) auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt, also nach Liouville konstant; wegen der 2. Gleichung in (11) folgt dann $f = 0$, d.h. (10).

<u>Bew. der Beh.</u>: Da f stetig ist, genügt es zu zeigen, daß f im Bereich $B = \{s \mid 1 \le \mathrm{Re}(s) \le 3,\ |\mathrm{Im}(s)| \ge 1\}$ beschränkt ist.

Trivialerweise ist $\Gamma(s)$ in B beschränkt (vgl. nochmals Bem. zu F1).

Doch auch $\Gamma(1-s) = \dfrac{\Gamma(4-s)}{(1-s)(2-s)(3-s)}$, da

$$|\Gamma(s-1)| \le \frac{|\Gamma(4-s)|}{|1-s||2-s||3-s|} \le \frac{|\Gamma(4-s)|}{|\mathrm{Im}(s)|^3} \le |\Gamma(4-s)|,$$

denn für $s \in B$ ist $|\mathrm{Im}(s)| \ge 1$ und $1 \le \mathrm{Re}(4-s) \le 3$.

Mit $t = \mathrm{Im}(s)$ ist schließlich

$2|\sin(\pi s)| = |e^{\pi s i} - e^{-\pi s i}| \ge \big||e^{\pi s i}| - |e^{-\pi s i}|\big| =$

$|e^{-\pi t} - e^{\pi t}| = e^{\pi|t|} - e^{-\pi|t|} \ge e^{\pi} - e^{-\pi}$, falls $|t| \ge 1$. $\square$

Der Relation (10) unmittelbar entnehmbar ist die folgende wichtige Eigenschaft der Gammafunktion:

F3: Die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion Γ ist nullstellenfrei:

(12) $$\Gamma(s) \neq 0 \quad \text{für jedes } s \in \mathbb{C}.$$

Infolgedessen ist die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

(13) $$\frac{1}{\Gamma(s)}$$

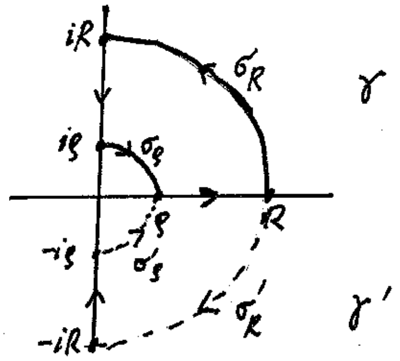
eine ganze Funktion, und deren Nullstellenmenge stimmt mit $-\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ überein. □

Über das bisher Gesagte hinaus, besitzt die Γ-Funktion noch eine ganze Reihe weiterer interessanter Eigenschaften. Wir beschränken uns hier aber auf das, was wir später im § 10 zur Aufstellung der Funktionalgleichung der ζ-Funktion benötigen werden. Hierzu dient auch die Diskussion des folgenden uneigentlichen Integrals mit komplexem Parameter s:

F 4: Für $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ gilt

$$(14) \qquad \int_0^\infty t^{s-1} \sin t \, dt = \Gamma(s) \sin(\pi s/2)$$

Bew. Betrachte $\int_\gamma z^{s-1} e^{-z} dz$ für folg. geschl. Weg γ:



Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ = Def. bereich von Log ist dabei

$z^{s-1} = e^{(s-1)\mathrm{Log}\, z}$ gesetzt. ⌈holomorph in z⌋

Nach Cauchy:

$\mathrm{Log}(it) = \log t + i\frac{\pi}{2}$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\int_\varrho^R t^{s-1} e^{-t} dt - \underbrace{\int_\varrho^R (it)^{s-1} e^{-it} i \, dt}_{= e^{i\frac{\pi}{2}s} \int_\varrho^R t^{s-1} e^{-it} dt} + \int_{\sigma_R} z^{s-1} e^{-z} dz + \int_{\sigma_\varrho} z^{s-1} e^{-z} dz = 0$$

Beh. Für $R \to \infty$ bzw. $\varrho \to 0$ gehen die Kreisbogenintegrale gegen 0.

Es folgt

$$(15) \qquad \int_0^\infty t^{s-1} e^{-it} dt = e^{-i\pi s/2} \Gamma(s) \quad \text{für } 0 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

(einschließlich der Konvergenz des Integrals). Indem man über den gestrichelten Weg γ' integriert erhält man analog:

$$(16) \qquad \int_0^\infty t^{s-1} e^{it} dt = e^{i\pi s/2} \Gamma(s) \quad \text{für } 0 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

Denn das Integral von $-iR$ bis $-i\varrho$ mit Parametrisierung $z(t) = it$, $-R \leq t \leq -\varrho$ hat den Wert

$$\int_{-R}^{-\varrho} (it)^{s-1} e^{-it} i\,dt = -\int_R^\varrho (-it)^{s-1} e^{it} i\,dt = e^{-i\pi s/2} \int_R^\varrho t^{s-1} e^{it} dt = -e^{-i\pi s/2} \int_\varrho^R t^{s-1} e^{it} dt.$$

Subtraktion von (15) und (16) ergibt eine

$$\left(e^{i\pi s/2} - e^{-i\pi s/2}\right)\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\left(e^{it} - e^{-it}\right)dt, \text{ und es folgt}$$

$$\Gamma(s)\sin(\pi s/2) = \int_0^\infty t^{s-1}\sin t\,dt$$

Bew. der Beh. Für z auf den Kreisbögen zu r ($=\rho$ oder R) ist $z = re^{i\varphi}$ für $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, also $z^{s-1} = r^{s-1}e^{(s-1)i\varphi}$, und wir erhalten

$$\int_{\sigma_r} z^{s-1}e^{-z}dz = \int_0^{\pi/2} r^{s-1}e^{(s-1)i\varphi}\, e^{-r\cos\varphi - ri\sin\varphi}\, re^{i\varphi}i\,d\varphi,$$

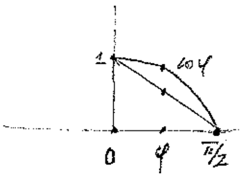
daher

$s = \sigma + it$

$$\left|\int_{\sigma_r} z^{s-1}e^{-z}dz\right| \le r^\sigma e^{\frac{\pi}{2}|t|}\int_0^{\pi/2} e^{-r\cos\varphi}d\varphi \le r^\sigma e^{\frac{\pi}{2}|t|}\,\pi/2$$

$0 < \sigma < 1$

Der letzte Ausdruck geht für $r \to 0$ gegen 0. Doch nicht für $r \to \infty$. Wir wollen zeigen, daß für $r \to \infty$ der mittlere Ausdruck gegen 0 geht und benutzen dazu, daß



$$\cos\varphi \ge 1 - \frac{2}{\pi}\varphi \quad \text{für } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

gilt (ÜA!). Damit ist der mittlere Ausdruck

$$\le r^\sigma e^{\pi|t|}\int_0^{\pi/2} e^{-r}e^{\frac{2}{\pi}r\varphi}d\varphi = r^\sigma e^{\pi|t|}e^{-r}\cdot\frac{\pi}{2r}\,e^{\frac{2}{\pi}r\varphi}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\le r^\sigma e^{\pi|t|}\frac{\pi}{2r}\,e^{-r}\left(e^r - 1\right) \le \frac{\pi}{2}e^{\pi|t|}\cdot\frac{1}{r^{1-\sigma}},$$

Doch wegen $1-\sigma > 0$ geht dies für $r \to \infty$ in der Tat gegen 0.

Die Abschätzung von $\left|\int_{\sigma_r'} z^{\sigma-1}e^{-z}dz\right|$ erfolgt analog.

Obwohl wir es im späteren §10 nicht benötigen, gehen wir jetzt noch auf die faktorielle Kennzeichnung der Γ-Funktion ein, die Weierstraß entdeckt hat. Nach F3 ist $\frac{1}{\Gamma(s)}$ eine ganze Funktion mit Nullstellenmenge $\{0,-1,-2,\dots\} = -\mathbb{N}_0$. Eine ganze Funktion h mit Nullstellen genau in diesen Punkten kann man sich nun aber auch durch

$$(17) \qquad h(s) = s \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

verschaffen, wobei die Faktoren $e^{-\frac{s}{k}}$ zur Konvergenzerzwingung angebracht werden (denn ohne sie wäre das Produkt sicherlich nicht konvergent, vgl. S. 17, Fakt ③). Zeigen wir also, daß das Produkt auf der rechten Seite von (17) für jedes $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, und zwar gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $D(0,R)$. Zunächst gibt es ein $m = m(R) \in \mathbb{N}$ mit

$$(18) \qquad \left|\frac{s}{k}\right| \le \frac{1}{2} \text{ auf } D(0,2R) \text{ für alle } k \ge m$$

Für die $k \ge m$ betrachte nun die holom. Fktn $g_k(s) = \mathrm{Log}(1+\frac{s}{k}) - \frac{s}{k}$ mit $e^{g_k(s)} = (1+\frac{s}{k})e^{-\frac{s}{k}}$, alles auf $D(0,2R)$. Wir behaupten:

$$(19) \qquad \sum_{k=m}^{\infty} g_k(s) \text{ konvergiert auf } D(0,2R) \text{ gleichmäßig, gegen eine Fkt. } g(s)$$

Wie man der Reihendarstellung $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ leicht entnimmt, gilt

$$|\log(1+z) - z| \le |z|^2 \quad \text{für } |z| \le \frac{1}{2}$$

Wegen (18) ist damit

$$|g_k(s)| = \left|\mathrm{Log}\left(1+\frac{s}{k}\right) - \frac{s}{k}\right| \le \left|\frac{s}{k}\right|^2 \le \frac{4R^2}{k^2} \quad \text{auf } D(0,2R)$$

für alle $k \ge m$, und wegen $\sum \frac{1}{k^2} < \infty$ folgt (19). Wegen (19) konvergiert nun aber $\prod_{k=m}^{n}(1+\frac{s}{k})e^{-\frac{s}{k}} = e^{\sum_{k=m}^{n} g_k(s)}$ auf $D(0,R)$ gleichmäßig eigen die holomorphe Funktion $e^{g(s)}$. – Mit (17) erhalten wir also wirklich eine ganze Funktion h mit Nullstellenmenge $\{0,-1,-2,\dots\} = -\mathbb{N}_0$.

Wir bezeichnen mit $h_n(s)$ die Partialprodukte von (17), also

$$h_n(s) = s\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}} = \frac{s(s+1)\dots(s+n)}{n!}\; e^{-s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

Es ist $s\,h_n(s+1) = s\,\dfrac{(s+1)\dots(s+n+1)}{n!}\, e^{-(s+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$, also

$$s h_n(s+1) = h_n(s)(s+n+1)\,e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = h_n(s)\,\frac{s+n+1}{n}\, e^{\left(\log n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$$

Außerdem ist $h_n(1) = (n+1)e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \frac{n+1}{n}\, e^{\log n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$, und durch Grenzübergang folgt

$$s h(s+1) = h(s)\,e^{-\gamma} \quad \text{sowie} \quad h(1) = e^{-\gamma}$$

mit der Eulerschen Zahl γ (vgl. S. 57 oben). Ersetzt man daher h durch

(20) $\quad H(s) = e^{\gamma s} h(s)$,

so erfüllt H die Funktionalgleichung

(21) $\quad sH(s+1) = H(s)$, sowie $H(1) = 1$.

<u>Satz 2</u> (Weierstrass 1854): Für die durch (17) und (20) definierte ganze Funktion

(22) $$H(s) = e^{\gamma s}\, s\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}$$

gilt $1/H(s) = \Gamma(s)$. Insbesondere ist $\Gamma(s) \neq 0$ für alle $s\in\mathbb{C}$, und die ganze Funktion $1/\Gamma(s) = H(s)$ hat die Produktdarstellung

(23) $$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s}\, s\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}$$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $f(s) = 1/H(s)$. Nach (21) erfüllt sie

$$f(s+1) = s f(s) \quad \text{sowie} \quad f(1) = 1 ,$$

und auf $Re(s) > 0$ ist sie holomorph; dort ist wegen $|1 + \frac{s}{k}| \geq |Re(1+\frac{s}{k})| = 1 + \frac{\sigma}{k}$ ferner

$$|H(s)| \geq e^{\gamma\sigma} \sigma \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{\sigma}{k}) e^{-\frac{\sigma}{k}} = H(\sigma) > 0 ,$$

und daher ist $f(s) = 1/H(s)$ auf jedem Streifen $a \leq Re(s) \leq b$ mit $0 < a < b < \infty$ beschränkt. Satz 1 liefert nun $f = \Gamma$.